

Теоретический минимум по электродинамике (4 семестр)

Содержание

Примечание от автора	6
Вопросы теорминимума (часть 1)	7
1. Дайте определение точечного заряда	7
2. Фундаментальные свойства заряда. Закон сохранения заряда.	7
3. Сформулируйте закон Кулона.	7
4. Дайте определение напряженности электрического поля.	8
5. Сформулируйте принцип суперпозиции электрических полей.	8
6. Дайте определение потока напряженности электрического поля.	8
7. Сформулируйте электростатическую теорему Гаусса.	8
8. Напряженность электростатического поля равномерно заряженных сферы и бесконечной плоскости.	9
9. Запишите граничные условия для нормальной и тангенциальной составляющих напряженности электрического поля.	9
10. Как связана с плотностью заряда дивергенция вектора напряженности электрического поля.	10
11. Запишите формулы для напряженности электрического поля дискретного и непрерывного распределений заряда.	10
12. Как определяется потенциал электрического поля.	11
13. Запишите формулы для потенциала электрического поля дискретного и непрерывного распределений заряда.	11
14. Запишите формулу, показывающую локальную связь между потенциалом и напряженностью электрического поля.	11
15. Приведите примеры эквипотенциальных поверхностей.	12
16. Что такое электрический диполь. Чему равны потенциал и напряженность поля электрического диполя.	12
17. Дайте определение электрического дипольного момента нейтральной системы зарядов.	12
18. Чему равна циркуляция вектора напряженности электростатического поля. Приведите доказательство для системы точечных зарядов.	13
19. Чему равен ротор вектора напряженности электростатического поля. Приведите доказательство для системы точечных зарядов.	14
Вопросы теорминимума (часть 2)	15
1 (20). Запишите уравнения Пуассона и Лапласа для потенциала электростатического поля.	15
2 (21). Чему равны напряженность и потенциал электрического поля, а также плотность свободных зарядов внутри однородного проводника в задачах электростатики. Приведите доказательства утверждений.	16
3 (22). Какова связь напряженности электрического поля у поверхности однородного проводника с поверхностной плотностью свободных зарядов в задачах электростатики.	16
4 (23). Плоский конденсатор и его емкость. Как рассчитать емкость батареи конденсаторов?	16
5 (24). Дайте определение вектора электрической поляризации. Что такое электрическая индукция поля?	19
6 (25). Сформулируйте теорему Гаусса для электрической индукции в интегральной и дифференциальной формах.	20

7 (26).	Запишите граничные условия для вектора индукции электрического поля. Откуда они следуют?	20
8 (27).	Материальное уравнение для электрического поля, диэлектрические восприимчивость и проницаемость.	21
9 (28).	Взаимная энергия системы точечных зарядов, собственная энергия заряда. Энергия системы непрерывно распределенных зарядов (формула).	22
10 (29).	Запишите формулы для энергии электростатического поля и ее объемной плотности.	23
11 (30).	Чему равны сила и момент сил, действующие на точечный диполь в электрическом поле.	23
Вопросы теорминимума (часть 3)		25
1 (31).	Дайте определения силы электрического тока и плотности тока. Какова связь между ними? Запишите уравнение непрерывности в интегральной и дифференциальной формах.	25
2 (32).	Условие стационарности тока. Закон Ома для участка цепи и его дифференциальная форма.	26
3 (33).	Сопротивление и удельное сопротивление проводника. Проводимость и удельная проводимость проводника.	27
4 (34).	Как рассчитать сопротивление батареи проводников?	27
5 (35).	Закон Джоуля-Ленца и его дифференциальная форма.	29
6 (36).	Сформулируйте правила Кирхгофа. Убедите экзаменатора в умении их применять.	30
7 (37).	Закон сохранения энергии для цепей постоянного тока, содержащих ЭДС.	31
8 (38).	Запишите закон взаимодействия элементов тока — закон Ампера. /* Не противоречит ли закон Ампера третьему закону Ньютона? */	32
9 (39).	Что такое вектор магнитной индукции поля? Запишите закон Био-Савара-Лапласа. Чему равна индукция магнитного поля прямого бесконечного проводя с током?	33
10 (40).	Сформулируйте теорему о циркуляции магнитной индукции в интегральной и дифференциальной формах.	35
11 (41).	Сформулируйте теорему Гаусса для магнитного поля в интегральной и дифференциальной формах (формулировка, формулы).	36
12 (42).	Что такое векторный потенциал? Как он связан с магнитной индукцией? Условие калибровки Кулона. /* Получение закона Био-Савара-Лапласа из векторного потенциала. */	36
13 (43).	Чему равна индукция магнитного поля плоского витка с током.	38
14 (44).	Чему равны сила и момент сил, действующие на элементарный ток в магнитном поле. /* Связь магнитного момента тока с моментом силы Ампера. */	39
15 (45).	Сила Лоренца и характер движения заряда в постоянных электрическом и магнитном полях.	39
16 (46).	Сформулируйте закон электромагнитной индукции Фарадея и правило Ленца. .	39
17 (47).	В чем заключается явление самоиндукции. Что характеризует коэффициент самоиндукции (индуктивность). В чем заключается явление взаимной индукции.	40
18 (48).	Запишите формулы для энергия магнитного поля и ее объемной плотности. Энергия системы замкнутых контуров с током (формула).	41
19 (49).	Молекулярные токи и вектор намагниченности. Дайте определение вектора напряженности магнитного поля.	41

20 (50). Сформулируйте теорему о циркуляции вектора напряженности магнитного поля (в интегральной и дифференциальной формах).	42
21 (51). Запишите материальные уравнения для магнитного поля. Что характеризуют магнитные восприимчивость и проницаемость вещества.	42
22 (52). Граничные условия для векторов напряженности и индукции магнитного поля.	43
23 (53). Что такое ток смещения? /* Дайте определение квазистационарных электромагнитных процессов. */	44
24 (54). Запишите уравнения Максвелла в дифференциальной форме.	45
25 (55). Запишите уравнения Максвелла в интегральной форме.	45
26 (56). Сколько решений имеет система уравнений Максвелла. Ответ обоснуйте.	46
27 (57). Дайте определение и запишите выражение для вектора Умова-Пойнтинга. /* Объёмная плотность энергии, плотность потока энергии. */	46
28 (58). Получите волновое уравнение из системы уравнений Максвелла. /* Связь между скоростью света, электрической и магнитной постоянными. */	47
29 (59). Приведите примеры расчета тока в электрических цепях при переходных процессах (RC- и RL-цепи).	49
30 (60). Собственные колебания в колебательном контуре. Амплитуда и начальная фаза при гармонических колебаниях.	51
31 (61). Уравнение затухающих колебаний и его решение, время затухания.	53
32 (62). Вынужденные колебания в колебательном контуре под действием гармонической силы. Формулы для амплитуды и фазы.	53
33 (63). Резонанс токов и напряжений. Приведите примеры.	54
34 (64). Опишите и обоснуйте метод комплексных амплитуд (описание, обоснование, пример). Что такое эффективные значения силы тока и напряжения?	55
35 (65). Запишите формулу для мощности переменного тока.	56
36 (66). В чем заключается скин-эффект? Чему равна толщина скин-слоя в простейших случаях?	58
37 (67). Что такое плоская волна? Нарисуйте взаимную ориентацию полевых векторов и волнового вектора в плоской волне. /* Чему равна объёмная плотность энергии электромагнитной волны? */ Чему равна плотность потока энергии электромагнитной волны? /* Чему равна плотность потока импульса? */	59
Вопросы теорминимума (часть 4)	63
38 (68). Обоснуйте возможность введения скалярного и векторного потенциалов нестационарного электромагнитного поля.	63
39 (69). Запишите условие калибровки Лоренца.	63
40 (70). Запишите уравнения для векторного и скалярного потенциалов электромагнитного поля.	64
41 (71). Какой вид имеют решения уравнения для векторного и скалярного потенциалов электромагнитного поля?	64
42 (72). Векторный и скалярный потенциалы электромагнитного поля электронеutralной системы движущихся зарядов на больших расстояниях от нее.	65
43 (73). Запишите выражения для напряженностей электрического и магнитного полей, создаваемых электронеutralной системой движущихся зарядов на больших расстояниях от нее.	65
44 (74). Запишите выражения для напряженностей электрического и магнитного полей, создаваемых электронеutralной системой движущихся зарядов, дипольный	

момент которой меняется по гармоническому закону, на больших (по сравнению с длиной волны) расстояниях от нее.	65
45 (75). Чему равна средняя мощность, излучаемая электронейтральной системой движущихся зарядов, дипольный момент которой меняется по гармоническому закону, на больших (по сравнению с длиной волны) расстояниях от нее?	65
Приложение.	66
Теорема по формулам.	66
Немного об основных понятиях векторного анализа.	67
Предметный указатель.	67

Примечание от автора

Актуальная ссылка (на чтение): <https://typst.app/project/r7zRF40EZ0NAwWrgzfzHGC>

Про ошибки писать сюда: я пока не решил...

Все пункты, помеченные C-style комментарием (`/* ... */`) — вопросы добавленные мной для большей полноты теорминимума. Их нет в официальном списке вопросов.

Все цилиндры считаем прямыми с окружностями в основании.

Надеюсь, что теормин будет постоянно улучшаться, для этого пишите о найденных ошибках.

Про виды полей

Важное уточнение: на экзамене стоит говорить, что есть —

- или электростатическое поле,
- или электромагнитное поле.

Магнитное поле само по себе не существует (поймете почему походу чтения теормина), пусть это в какой-то момент и возникает в лекциях (:angry:).

Распределение ролей при написании

© Круглов Лев — текст,

© Куликов Артём — вёрстка.

Благодарности

Особая благодарность Марии Сергеевне за то, что помогла разобраться с некоторыми очень тонкими моментами, и в целом за вычитку!

Такая же благодарность всей 204-й группе за поиск опечаток и неточностей и сведения о том, как их исправить!

Основано на:

1. `elecrocq_19-05_21-58` (2018 год).pdf © (автор не указан)
2. `electrode_fixed`.pdf © Nikita Lukinov

GL, HF

Вопросы теорминимума (часть 1)

1. Дайте определение точечного заряда

Точечный электрический заряд — это электрически заряженная материальная точка.

Материальная точка — объект, размером которого можно пренебречь по сравнению с расстояниями в рассматриваемой задаче.

2. Фундаментальные свойства заряда. Закон сохранения заряда.

1. **Электрический заряд** — это физическая скалярная величина, определяющая способность тел быть источником электромагнитных полей и принимать участие в электромагнитном взаимодействии.
2. Заряд существует в двух видах: положительный и отрицательный. Одноименные заряды отталкиваются, разноименные – притягиваются.
3. Минимальный положительный заряд приблизительно равен $e \approx 1.6 \cdot 10^{-19}$ Кл. (элементарный заряд). Минимальный отрицательный заряд есть заряд электрона. Он равен элементарному заряду, взятому с противоположным знаком.
4. Электрический заряд дискретен, то есть заряд любого тела составляет целое кратное от элементарного электрического заряда.
5. В природе отрицательных зарядов столько же, сколько положительных. Возникновение заряженных тел обусловлено не рождением зарядов, а их перераспределением (происходящим, например, при трении).

Закон сохранения заряда:

1. Электроны и протоны — частицы с бесконечным временем жизни, их заряды инвариантны при переходе от одной инерциальной системы координат к другой и не зависят от скорости.
2. Суммарный заряд, находящийся на изолированной системе тел остается неизменным при любом взаимодействии.

$$\sum_{i=1}^N q_i = \sum_{j=1}^{N'} q'_j = \text{const}$$

3. Сформулируйте закон Кулона.

Два **неподвижных точечных** заряда в **инерциальной системе отчета** взаимодействуют с силой, прямо пропорциональной величинам зарядов q_1, q_2 и обратно пропорциональной квадрату расстояния $|\vec{r}_{12}|$ между ними. В системе СИ и **в вакууме** сила взаимодействия двух точечных зарядов выражается формулой:

$$\vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{|\vec{r}_{12}|^2} \frac{\vec{r}_{12}}{|\vec{r}_{12}|}$$

$$\epsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12} \frac{\text{Кл}^2}{\text{Н} \cdot \text{м}^2}$$

Эта сила направлена по прямой, соединяющей заряды, и является силой притяжения для разноименных зарядов и отталкивания для одноименных. Если заряды находятся в диэлектрике, то сила их взаимодействия уменьшается в ϵ раз.

Также используют коэффициент пропорциональности:

$$k := \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$$

$$k = 9 \cdot 10^9 \frac{\text{Н} \cdot \text{м}^2}{\text{Кл}^2}$$

Замечание: закон Кулона применим для расстояний от 10^{-15}м до 10^5м

Примечание: Предпочтительно везде писать ϵ и в вакууме считать его равным 1.

4. Дайте определение напряженности электрического поля.

Пробный заряд — не меняющий (пренебрежимо мало меняющий) характеристики поля заряд.

Векторную величину, численно равную отношению силы, действующей на **пробный точечный положительный** заряд q^* , к величине этого заряда называют **напряженностью электрического поля**:

$$\vec{E} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\vec{F}}{q^*}$$

5. Сформулируйте принцип суперпозиции электрических полей.

Напряжённость электрического поля, создаваемого в любой точке пространства системой зарядов, равна векторной сумме напряжённостей полей, создаваемых в этой точке зарядами системы по отдельности (в отсутствие всех остальных зарядов).

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^N \vec{E}_i$$

$$\vec{E} = \iiint_V \rho(\vec{r}) \, dv$$

$$\vec{E} = \iint_S \sigma(\vec{r}) \, ds$$

$$\vec{E} = \int_L \lambda(\vec{r}) \, dl$$

6. Дайте определение потока напряженности электрического поля.

Поток вектора напряжённости электрического поля $\vec{E}$ через поверхность S в сторону, соответствующую выбранному векторному полю нормалей $\vec{n}$, равен:

$$\Phi \stackrel{\text{def}}{=} \oiint_S \langle \vec{E}, d\vec{s} \rangle$$

$$d\vec{s} := ds \cdot \vec{n}$$

7. Сформулируйте электростатическую теорему Гаусса.

Поток вектора напряжённости электрического поля через произвольную замкнутую поверхность S **пропорционален** суммарному свободному заряду внутри объема, ограниченного данной поверхностью.

В вакууме:

$$\Phi_E \stackrel{\text{def}}{=} \oint_S \langle \vec{E}, d\vec{s} \rangle = \iiint_V \operatorname{div} \vec{E} dv = \frac{1}{\varepsilon_0} \iiint_V \rho dv = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

8. Напряженность электростатического поля равномерно заряженных сферы и бесконечной плоскости.

1. Сфера

□ $\vec{r}_0$ — радиус-вектор центра

□ $\vec{r}_1$ — радиус-вектор точки

$$\vec{r} := \vec{r}_1 - \vec{r}_0$$

$$\vec{E} = \begin{cases} 0, & |\vec{r}| < R \\ \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q}{|\vec{r}|^2}, & |\vec{r}| \geq R \end{cases}$$

2. Бесконечная плоскость

Равномерно заряженная с поверхностной плотностью заряда σ , создаёт электрическое поле в любой точке пространства **вне** плоскости с напряжённостью:

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \cdot \vec{n},$$

где $\vec{n}$ вектор нормали к плоскости.

9. Запишите граничные условия для нормальной и тангенциальной составляющих напряженности электрического поля.

Для тангенциальных компонент.

На границе двух сред проекции вектора $\vec{E}$ на любое касательное к границе направление удовлетворяют соотношению:

$$|\vec{E}_{\tau_1}| = |\vec{E}_{\tau_2}|.$$

Доказательство:

Рассмотрим границу двух сред и прямоугольный контур, пара сторон которого перпендикулярна границе, такой, что граница делит его на две равные части. Вследствие потенциальности электростатического поля, циркуляция вектора его напряжённости по любому замкнутому контуру равна нулю. Запишем это условие для данного контура, после чего устремим длину перпендикулярной границе стороны прямоугольника к нулю. Получим искомое соотношение.

$$\oint \langle \vec{E}, d\vec{l} \rangle = 0$$

$$|\vec{E}_{\tau_1}| \cdot \Delta l + \cancel{|\vec{E}_{n_1}| \cdot \Delta h} - |\vec{E}_{\tau_2}| \cdot \Delta l - \cancel{|\vec{E}_{n_2}| \cdot \Delta h} = 0, \text{ если } \Delta h \rightarrow 0 + 0$$

$$\Delta l \cdot (|\vec{E}_{\tau_1}| - |\vec{E}_{\tau_2}|) = 0 \quad | \div \Delta l \neq 0$$

$$|\vec{E}_{\tau_1}| = |\vec{E}_{\tau_2}|.$$

Доказано.

Для нормальных компонент.

На границе двух сред проекции вектора $\vec{E}$ на нормаль, проведённую к границе из первой среды во вторую, удовлетворяют соотношению:

$$|\vec{E}_{n_2}| - |\vec{E}_{n_1}| = \frac{\sigma}{\varepsilon \varepsilon_0},$$

где σ — поверхностная плотность свободных зарядов, находящихся на границе.

Доказательство:

Применим теорему Гаусса для электрической напряжённости к цилиндру, со следующими свойствами:

1. Малый ($h \rightarrow 0 + 0$, так как иначе это будет уже не граница).
2. Цилиндр $\parallel \vec{n}$.
3. Его нижнее основание находится в первой среде, а верхнее — во второй.

$$\Phi_E = \oint_S \langle \vec{E}, d\vec{s} \rangle = \frac{Q_{\text{inside}}}{\varepsilon \varepsilon_0}$$

Обозначим площадь основания $S_{\text{base}} =: S$

1. Поток через верхнее основание цилиндра: $\Phi_{E_2} = +|\vec{E}_{n_2}| S$.
2. Через боковую поверхность $\oint_{S_{\text{side}}} = 0$, в силу симметрии относительно оси цилиндра.
3. Через нижнее основание: $\Phi_{E_1} = -|\vec{E}_{n_1}| S$.

Рассматриваемая граница сред, очевидно, частично находится в цилиндре.

$$Q_{\text{inside}} = \sigma \cdot S$$

Следовательно,

$$|\vec{E}_{n_2}| S - |\vec{E}_{n_1}| S = \frac{\sigma S}{\varepsilon \varepsilon_0}$$

А значит,

$$|\vec{E}_{n_2}| - |\vec{E}_{n_1}| = \frac{\sigma}{\varepsilon \varepsilon_0}$$

Доказано.

10. Как связана с плотностью заряда дивергенция вектора напряжённости электрического поля.

$$\text{div } \vec{E} = \frac{\rho(x, y, z)}{\varepsilon_0}$$

11. Запишите формулы для напряжённости электрического поля дискретного и непрерывного распределений заряда.

Следует из принципа суперпозиции.

$$\vec{E}(\vec{r}) = k \cdot \sum_{i=1}^N \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^2} \cdot \frac{(\vec{r} - \vec{r}_i)}{|\vec{r} - \vec{r}_i|} \cdot q_i$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = k \cdot \iiint_V \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \cdot \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \cdot \rho(\vec{r}') dv$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = k \cdot \iint_S \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \cdot \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \cdot \sigma(\vec{r}') ds$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = k \cdot \int_L \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \cdot \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \cdot \lambda(\vec{r}') dl$$

12. Как определяется потенциал электрического поля.

Потенциал — скалярная величина, численно равная работе по перемещению единичного положительного пробного заряда, которую должен выполнить заряд для перемещения из точки, в которой рассматривается потенциал, до точки, в которой потенциал равен 0 (например, в бесконечности).

$$\varphi \stackrel{\text{def}}{=} \frac{A}{q}$$

Наглядно:

$$dA = \langle \vec{F}, d\vec{l} \rangle$$

$$A = \int_L \langle \vec{F}, d\vec{l} \rangle = \{ \vec{F} = q\vec{E} \} = q \int_L \langle \vec{E}, d\vec{l} \rangle = q \cdot \varphi$$

13. Запишите формулы для потенциала электрического поля дискретного и непрерывного распределений заряда.

$$\varphi(\vec{r}) = k \cdot \sum_{i=1}^N \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_i|} \cdot q_i$$

$$\varphi(\vec{r}) = k \cdot \iiint_V \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \cdot \rho(\vec{r}') dv$$

$$\varphi(\vec{r}) = k \cdot \iint_S \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \cdot \sigma(\vec{r}') ds$$

$$\varphi(\vec{r}) = k \cdot \int_L \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \cdot \lambda(\vec{r}') dl$$

14. Запишите формулу, показывающую локальную связь между потенциалом и напряженностью электрического поля.

$$\vec{E} = -\text{grad } \varphi = -\nabla \varphi$$

Доказательство:

Рассмотрим единичный заряд (неважно точечный или нет):

$$\vec{E}_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_i}{|\vec{r}_i|^2} \cdot \frac{\vec{r}_i}{|\vec{r}_i|} = -\text{grad} \left[\frac{1}{(4\pi\epsilon_0)} \cdot \frac{q_i}{|\vec{r}_i|} \right] = -\nabla \varphi$$

Просуммируем (проинтегрируем) и получим искомое.

Доказано.

15. Приведите примеры эквипотенциальных поверхностей.

Эквипотенциальными поверхностями называют поверхности равного потенциала. Так как компонента вектора $\text{grad } \varphi$, касательная к эквипотенциальной поверхности, всегда равна нулю, силовые линии поля в каждой точке направлены по нормали к соответствующей эквипотенциальной поверхности. Эквипотенциальные поверхности электрического поля, создаваемого точечным зарядом — сферы с центрами в этом заряде. Эквипотенциальные поверхности поля, создаваемого бесконечной равномерно заряженной плоскостью, есть бесконечные плоскости, параллельные этой заряженной плоскости.

16. Что такое электрический диполь. Чему равны потенциал и напряженность поля электрического диполя.

Электрический диполь.

Электрический диполь — это нейтральная по заряду система из двух точечных зарядов, одинаковых по модулю (q), противоположных по знаку, находящихся на фиксированном расстоянии (l) друг от друга.

Диполь характеризуется его **электрическим дипольным моментом**:

$$\vec{p}_l = q\vec{l},$$

где $\vec{l}$ проводится от отрицательного заряда к положительному.

Если поле, создаваемое диполем, рассматривается на расстоянии, много большем l ($l \ll r$), диполь называют **точечным** или **элементарным**.

Потенциал и напряжённость поля электрического диполя.

Пусть **начало отсчёта** выбрано в **центре отрезка**, соединяющего заряды **элементарного** диполя.

Потенциал поля электрического диполя:

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\langle \vec{p}_l, \vec{r} \rangle}{|\vec{r}|^3}$$

Напряжённость поля электрического диполя:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{3\vec{r}\langle \vec{p}_l, \vec{r} \rangle - \vec{p}_l |\vec{r}|^2}{|\vec{r}|^5} \right]$$

$\angle \theta$ — угол между диполем и направлением на точку.

Тогда напряжённость в этой точке равна:

$$|\vec{E}(\vec{r}, \theta)| = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p_l \sqrt{1 + 3\cos^2 \theta}}{|\vec{r}|^3}$$

17. Дайте определение электрического дипольного момента нейтральной системы зарядов.

Диполь во внешнем электростатическом поле разворачивается. Заряды на краях объема остаются (**поверхностные**) и образуют «противополе».

Дипольный момент – силовая характеристика вращения нейтральной системы зарядов.

$$\vec{p} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^N q_i \vec{r}_i$$

$$\vec{p} = \iiint_V \vec{r}' \cdot \rho(\vec{r}) \, dv$$

$$\vec{p} = \iint_S \vec{r}' \cdot \sigma(\vec{r}) \, ds$$

$$\vec{p} = \int_L \vec{r}' \cdot \lambda(\vec{r}) \, dl$$

18. Чему равна циркуляция вектора напряженности электростатического поля. Приведите доказательство для системы точечных зарядов.

Циркуляция вектора напряженности электростатического поля равна нулю:

$$\oint \langle \vec{E}, d\vec{l} \rangle = 0.$$

Есть 2 варианта доказательства:

1. «по-школьному»,
2. через сведение к интегралу от нулевого ротора.

«По-школьному».

Доказательство:

Заряд q перемещается в электростатическом поле из точки A в точку B по произвольной траектории.

Разобьём путь на маленькие участки, чтобы на каждом можно было считать поле $\vec{E}$ постоянным:

$$A_{i,(i+1)} = \langle \vec{F}_i, \Delta \vec{r}_{i,(i+1)} \rangle$$

$$A_{i,(i+1)} = |\vec{F}_i| \cdot |\Delta \vec{r}_{i,(i+1)}| \cdot \cos(\angle(\vec{F}_i, \Delta \vec{r}_{i,(i+1)}))$$

$$\Delta h_{i,(i+1)} := \Delta r_{\|\vec{E}_i, (i+1)} := |\Delta \vec{r}_{i,(i+1)}| \cdot \cos(\angle(\vec{F}_i, \Delta \vec{r}_{i,(i+1)}))$$

$$A_{i,(i+1)} = |\vec{F}_i| \cdot \Delta h_{i,(i+1)} \quad \Big| \quad \sum_{i=1}^{N-1}$$

$$A = |\vec{F}| \cdot |\Delta h|$$

Поскольку путь замкнут, начальная и конечная точка совпадают, и $\Delta h = 0$. Следовательно:

$$A_{\text{closed}} = |\vec{F}| \cdot 0 = 0$$

Следовательно:

$$A_{\text{closed}} = \oint \langle \vec{E}, d\vec{l} \rangle = 0$$

Суммируя (интегрируя) по всем зарядам системы, получаем аналогичное выражение для системы точечных зарядов.

Доказано.

Через сведение к интегралу от нулевого ротора.

Доказательство:

В силу принципа суперпозиции, достаточно провести доказательство для напряжённости поля, создаваемого одним точечным зарядом.

Применим формулу Стокса к замкнутому контуру и поверхности, которую он ограничивает:

$$\oint_{\partial S} \langle \vec{E}, d\vec{l} \rangle = \iint_S \langle \text{rot } \vec{E}, d\vec{s} \rangle = \{ \text{rot } \vec{E} = 0 \} = 0$$

Суммируя (интегрируя) по всем зарядам системы, получаем аналогичное выражение для системы точечных зарядов.

Доказано.

19. Чему равен ротор вектора напряженности электростатического поля. Приведите доказательство для системы точечных зарядов.

$$\text{rot } \vec{E} = 0$$

Доказательство:

В силу принципа суперпозиции, достаточно провести доказательство для напряжённости поля, создаваемого одним точечным зарядом.

$$\text{rot}(\alpha \cdot \vec{a}) = \alpha \cdot \text{rot } \vec{a} + [\text{grad } \alpha, \vec{a}]$$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{|\vec{r}|^2} \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$$

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{E} &= \text{rot} \left[\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{|\vec{r}|^2} \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} \right] = \left\{ \alpha = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r}|^3} \right\} = \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{q}{|\vec{r}|^3} \cdot \text{rot } \vec{r} + \left[\text{grad} \left(\frac{q}{|\vec{r}|^3} \right), \vec{r} \right] \right\} = \\ &= \{ \text{rot } \vec{r} = 0, [\text{grad } f(|\vec{r}|), \vec{r}] = 0 \} = 0, \end{aligned}$$

где f — скалярная функция.

Суммируя (интегрируя) по всем зарядам системы, получаем аналогичное выражение для системы точечных зарядов.

Доказано.

Вопросы теорминимума (часть 2)

1 (20). Запишите уравнения Пуассона и Лапласа для потенциала электростатического поля.

Уравнение Пуассона:

$$\nabla^2 \varphi(\vec{r}) = -\frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon \varepsilon_0}$$

Доказательство:

Выводится из уравнения Гаусса:

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon \varepsilon_0}$$

И:

$$\vec{E} = -\operatorname{grad} \varphi$$

Доказано.

Оно вырождается в уравнение Лапласа, при:

$$\rho(\vec{r}) \equiv 0$$

То есть:

$$\nabla^2 \varphi(\vec{r}) = 0$$

А также граничные условия 2 родов:

1. Если известно ρ :

$$q_i = -\varepsilon \varepsilon_0 \oint_{S_i} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \vec{n}} \right) \Big|_{S_i} dS_i$$

2. Если известно q_i :

$$\oint_{S_i} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \vec{n}} \right) \Big|_{S_i} dS_i = -\frac{q_i}{\varepsilon \varepsilon_0}$$

Замечание:

Чтобы лучше запомнить, как применять изученный материал, запомните табличку:

$$q \longrightarrow \text{из уравнения с множителем } \frac{1}{r}$$

$$\rho \longrightarrow \text{из уравнения Пуассона}$$

$$\sigma \longrightarrow \text{из граничного условия } \Delta D$$

Примечание автора: $\nabla^2 \varphi \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi$, где ∇^2 — всегда (в любой системе координат) обозначает Лапласиан. Естественно он равен $\langle \nabla, \nabla \rangle$ только в ПДСК, но обозначение остается у меня с квадратом во избежание путаницы с разностью ($\Delta f \stackrel{\text{def}}{=} f(V_2) - f(V_1)$). Для остальных СК см. приложение.

2 (21). Чему равны напряженность и потенциал электрического поля, а также плотность свободных зарядов внутри однородного проводника в задачах электростатики. Приведите доказательства утверждений.

Поскольку рассматривается электростатика, то внутри проводника нет движения заряженных частиц, как следствие нет токов, значит, нет и поля, так как иначе под его действием они бы возникали, следовательно напряженность нулевая.

Рассмотрим произвольную замкнутую поверхность внутри проводника и применим к ней электростатическую теорему Гаусса.

$$\begin{cases} \vec{E} = 0 \\ \vec{E} = -\text{grad } \varphi \end{cases}$$

$\Rightarrow \varphi = \text{const}$ внутри проводника, что позволяет говорить о потенциале проводника.

3 (22). Какова связь напряженности электрического поля у поверхности однородного проводника с поверхностной плотностью свободных зарядов в задачах электростатики.

Применим теорему Гаусса к цилиндру, со следующими свойствами:

1. Малый ($h \rightarrow 0 + 0$, так как иначе это будет уже не граница).
2. Цилиндр $\parallel \vec{n}$.
3. Его одно основание находится внутри проводника, а другое — снаружи.

$$\oiint_S \langle \vec{E}, d\vec{s} \rangle = \frac{Q_{\text{inside}}}{\varepsilon \varepsilon_0}$$

1. Поток через верхнее основание: $\oiint_S \langle \vec{E}, d\vec{s} \rangle = |\vec{E}| \cdot S_{\text{upper_base}}$.
2. Через боковую поверхность $\oiint_S = 0$, в силу симметрии относительно оси цилиндра.
3. Через нижнее основание цилиндра то же $\oiint_S = 0$, так как $\vec{E} = 0$ внутри проводника (потому что отсутствуют токи).

$$Q_{\text{inside}} = \sigma \cdot S_{\text{upper_base}}$$

Следовательно,

$$|\vec{E}| \cdot \cancel{S_{\text{upper_base}}} = \frac{\sigma \cdot \cancel{S_{\text{upper_base}}}}{\varepsilon \varepsilon_0}$$

А значит,

$$|\vec{E}| = \frac{\sigma}{\varepsilon \varepsilon_0}$$

4 (23). Плоский конденсатор и его емкость. Как рассчитать емкость батареи конденсаторов?

Общие определения.

Конденсатор — пара проводников, расстояние между которыми много меньше расстояния до остальных тел. При этом проводники называют **обкладками конденсатора**.

Ёлектроёмкость — это физическая скалярная величина, определяющая способность конденсатора аккумулировать электрический заряд и численно равная:

$$C \stackrel{\text{def}}{=} \frac{Q}{\varphi - \varphi_{\text{ref}}}, \varphi_{\text{ref}} = \{\text{например}\} = \varphi(\infty) = 0$$

Или, как в нашем задачнике и учебнике:

$$\varphi = \varphi_{\text{левой обкладки}}$$

$$\varphi_{\text{ref}} = \varphi_{\text{правой обкладки}}$$

Плоский конденсатор.

Плоский конденсатор — конденсатор, состоящий из двух параллельных одинаковых проводящих пластин площадью S , находящихся на расстоянии d , разделённых диэлектриком с проводимостью ε . Считается, что $d \ll r$, где r — линейные размеры пластины, как следствие почти на всей площади поле равномерно и $\vec{E} \parallel \vec{n}$. Ёго ёмкость:

Ёмкость плоского конденсатора:

$$C = \frac{\varepsilon \varepsilon_0 S}{d}$$

Доказательство:

Как известно,

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon \varepsilon_0} \vec{n},$$

$$q = \sigma S,$$

Следовательно:

$$\Delta\varphi = \int_a^b \langle \vec{E}, d\vec{l} \rangle = |\vec{E}| \cdot d = \frac{\sigma d}{\varepsilon \varepsilon_0},$$

так как $d := b - a$ — расстояние между обкладками и $\vec{l} \uparrow \vec{E} \uparrow \vec{n}$

А значит:

$$C = \frac{q}{\Delta\varphi} = \sigma S : \frac{\sigma d}{\varepsilon \varepsilon_0} = \frac{\varepsilon \varepsilon_0 S}{d}$$

Доказано.

Расчёт ёмкости батареи конденсаторов.

Батарея конденсаторов — система, состоящая из соединённых между собой одиночных конденсаторов.

Простейшими из соединений конденсаторов являются:

1. **параллельное,**
2. **последовательное.**

Тогда нахождение ёмкости батареи можно свести к *пошаговому упрощению схемы* — замене группы соединённых конденсаторов на один эквивалентный, используя известные формулы, пока вся батарея не будет заменена одним эквивалентным конденсатором.

Параллельное соединение конденсаторов.

При параллельном соединении конденсаторов левые и правые пластины всех конденсаторов соединяются между собой, образуя общие проводники. Такое соединение даёт эквивалентный конденсатор с эквивалентной ёмкостью:

$$C = \sum_{i=1}^N C_i$$

Доказательство:

Общий заряд:

$$q = \sum_{i=1}^N q_i$$

Где,

$$q_i = \Delta\varphi_i \cdot C_i \quad \forall i = \overline{1, N}$$

Разность потенциалов одинакова для всех (в силу параллельного соединения):

$$\Delta\varphi = \Delta\varphi_i \quad \forall i = \overline{1, N}$$

Следовательно:

$$q = \sum_{i=1}^N (\Delta\varphi \cdot C_i) = \Delta\varphi \cdot \sum_{i=1}^N C_i$$

Подставляя выражения для зарядов, получаем:

$$\cancel{\Delta\varphi} \cdot C = q = \sum_{i=1}^N q_i = \cancel{\Delta\varphi} \cdot \sum_{i=1}^N C_i$$

А значит, эквивалентная ёмкость:

$$C = \sum_{i=1}^N C_i$$

Доказано.

Последовательное соединение конденсаторов.

При последовательном соединении конденсаторов они соединяются «цепочкой», то есть правая пластина одного соединяется с левой пластиной следующего. Такое соединение даёт эквивалентный конденсатор с эквивалентной ёмкостью:

$$\frac{1}{C} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{C_i}$$

Доказательство:

При последовательном соединении:

Заряд на всех конденсаторах одинаков (следствие из закона сохранения заряда):

$$q = q_i \quad \forall i = \overline{1, N}$$

Разность потенциалов складывается:

$$\Delta\varphi = \sum_{i=1}^N \varphi_i$$

А так как:

$$\Delta\varphi_1 = \frac{q_i}{C_i} = \frac{q}{C_i} \quad \forall i = \overline{1, N}$$

То:

$$\sum_{i=1}^N \varphi_i = \sum_{i=1}^N \frac{q}{C_i} = q \cdot \sum_{i=1}^N \frac{1}{C_i}$$

Подставляя выражения для общей разностей потенциалов, получаем:

$$q \cdot C = \Delta\varphi = \sum_{i=1}^N \varphi_i = q \cdot \sum_{i=1}^N \frac{1}{C_i}$$

А значит, эквивалентная ёмкость:

$$C = \sum_{i=1}^N \frac{1}{C_i}$$

Доказано.

5 (24). Дайте определение вектора электрической поляризации. Что такое электрическая индукция поля?

Вектор электрической поляризации.

Электрическая поляризация диэлектриков — явление, связанное с ограниченным смещением связанных зарядов в диэлектрике или поворотом электрических диполей, обычно под воздействием внешнего электрического поля.

Вектор поляризации среды — это векторная физическая величина, равная дипольному моменту единицы объёма вещества, возникающему при его поляризации.

$$\vec{P} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\sum_{i=1}^N \vec{p}_i}{\Delta V}$$

(Вектор) электрической индукции.

Электрическая индукция — векторная величина, равная сумме вектора напряжённости электрического поля, умноженного на электрическую постоянную, и вектора поляризованности.

$$\vec{D} \stackrel{\text{def}}{=} \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$

6 (25). Сформулируйте теорему Гаусса для электрической индукции в интегральной и дифференциальной формах.

Поток вектора электрической индукции поля через произвольную замкнутую поверхность S равен суммарному свободному заряду внутри объема, ограниченного данной поверхностью.

Примечание: предпочитайте этот вариант варианту для напряженности, так как тут невозможно «потерять» ε и ε_0 .

В интегральной форме.

$$\Phi_D \stackrel{\text{def}}{=} \oint_S \langle \vec{D}, d\vec{s} \rangle = \iiint_V \operatorname{div} \vec{D} dv = \iiint_V \rho dv = Q$$

В дифференциальной форме.

Дивергенция вектора электрической индукции равна плотности свободного заряда внутри объема, ограниченного данной поверхностью.

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho$$

7 (26). Запишите граничные условия для вектора индукции электрического поля. Откуда они следуют?

Для касательных компонент.

На границе двух сред проекции вектора $\vec{D}$ на любое касательное к границе направление **при отсутствии поверхностных токов смещения** удовлетворяют соотношению:

$$|\vec{D}_{\tau_1}| = |\vec{D}_{\tau_2}|.$$

Доказательство:

Тривиально следует из:

1. аналогичного утверждения для проекции вектора $\vec{E}$ и
2. материального уравнения для электростатического поля.

$$\begin{cases} |\vec{E}_{\tau_1}| = |\vec{E}_{\tau_2}| \\ \vec{D} = \varepsilon \varepsilon_0 \vec{E} \end{cases}$$

Следовательно,

$$|\varepsilon \varepsilon_0 \vec{D}_{\tau_1}| = |\varepsilon \varepsilon_0 \vec{D}_{\tau_2}|$$

А значит,

$$|\vec{D}_{\tau_1}| = |\vec{D}_{\tau_2}|$$

Доказано.

Для нормальных компонент.

На границе двух сред проекции вектора $\vec{D}$ на нормаль, проведенную к границе из первой среды во вторую, удовлетворяют соотношению:

$$|\vec{D}_{n_2}| - |\vec{D}_{n_1}| = \sigma,$$

где σ — поверхностная плотность свободных зарядов, находящихся на границе.

Доказательство:

Есть 2 варианта доказательства.

1. Доказать аналогично граничному условию для вектора напряженности.
2. Сказать, что это тривиально следует из:
 1. аналогичного утверждения для проекции вектора $\vec{E}$ и
 2. материального уравнения для электростатического поля.

$$\begin{cases} |\vec{E}_{n_2}| - |\vec{E}_{n_1}| = \frac{\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0} \\ \vec{D} = \varepsilon\varepsilon_0\vec{E} \end{cases}$$

Следовательно,

$$\frac{|\vec{D}_{n_2}|}{\varepsilon\varepsilon_0} - \frac{|\vec{D}_{n_1}|}{\varepsilon\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0} \quad | \quad \times (\varepsilon\varepsilon_0) \neq 0$$

А значит,

$$|\vec{D}_{n_2}| - |\vec{D}_{n_1}| = \sigma.$$

Доказано.

8 (27). Материальное уравнение для электрического поля, диэлектрические восприимчивость и проницаемость.

Примечание: в формулировке в списке вопросов *опечатка* — почему-то материальных уравнений у них больше одного, что не так!

Диэлектрическая восприимчивость.

Поляризуемость — физическое свойство веществ приобретать электрический или магнитный дипольный момент во внешнем электромагнитном поле.

$\vec{P}(\vec{E})$ обычно рассматривают, используя заранее известное разложение в ряд. Мы считаем в первом приближении (в не очень сильных электрических полях для большинства материальных сред?):

$$\vec{P}(\vec{E}) = \chi\varepsilon_0\vec{E} + o(\vec{E}),$$

где χ — **диэлектрическая восприимчивость**, коэффициент линейной связи между $\vec{P}$ и $\vec{E}$.

Очевидно, что для вакуума можно считать $\chi = 0$ (так как количество заряженных частиц для поляризации пренебрежимо мало).

(Относительная диэлектрическая) проницаемость и материальное уравнение для электрического поля.

Рассмотрим, используя знания о векторе электрической поляризации для **слабых электрических полей**.

$$\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} + \chi\varepsilon_0\vec{E} = \varepsilon_0\vec{E}(1 + \chi) = \varepsilon_0\varepsilon\vec{E},$$

где $\varepsilon := 1 + \chi$ — **(относительная) диэлектрическая проницаемость**.

$$\vec{D} = \varepsilon\varepsilon_0\vec{E}$$

называется материальным уравнением для электростатического поля.

9 (28). Взаимная энергия системы точечных зарядов, собственная энергия заряда. Энергия системы непрерывно распределенных зарядов (формула).

(Взаимная) энергия системы точечных и непрерывно распределенных зарядов.

Эти формулы выводятся из:

1. закона Кулона;
2. определения электрического потенциала;
3. определения потенциальной энергии.

Коэффициент $\frac{1}{2}$ появляется, чтобы не учитывать пары зарядов дважды (обратите внимание на двойную сумму).

$$W \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i \varphi'_i = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^N \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq l}}^N k \frac{q_l q_m}{r_{lm}},$$

где φ'_i — потенциал в точке, где находится заряд q_i , создаваемый всеми остальными зарядами, кроме самого q_i .

$$W = \frac{1}{2} \iiint_V \varphi(\vec{r}) \cdot \rho(\vec{r}) dv$$

$$W = \frac{1}{2} \iint_S \varphi(\vec{r}) \cdot \sigma(\vec{r}) ds$$

$$W = \frac{1}{2} \int_L \varphi(\vec{r}) \cdot \lambda(\vec{r}) dl$$

Собственная энергия заряда.

Собственная энергия заряда — это энергия, связанная с самим зарядом, то есть энергозатраты на создание или собирание заряда в определённую конфигурацию.

Грубо говоря: сколько нужно потратить энергии, чтобы «собрать» данный заряд из бесконечности в одно место.

Попробуем «посчитать» энергию, связанную с полем точечного заряда:

$$W = \iint_S \frac{|\vec{D}|^2}{2\epsilon\epsilon_0} ds,$$

так как $\vec{E} \uparrow \vec{D}$ для единичного заряда (рассматриваем как сферу с поверхностными зарядами).

Следовательно,

$$W = \frac{1}{2\epsilon\epsilon_0} \int_0^{+\infty} \left[\frac{1}{4\pi} \frac{q}{r^2} \right]^2 4\pi r^2 dr$$

$$W = \frac{q^2}{8\pi\epsilon\epsilon_0} \int_0^{+\infty} \frac{1}{r^2} dr \xrightarrow{r \rightarrow 0+0} +\infty \Rightarrow (?!)$$

У точечного заряда собственная энергия бесконечна. Это физическая проблема классической электродинамики.

10 (29). Запишите формулы для энергии электростатического поля и ее объемной плотности.

Объемная плотность.

$$w_E \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\langle \vec{E}, \vec{D} \rangle}{2}$$

Энергия электростатического поля.

$$W_E \stackrel{\text{def}}{=} \iiint_V w_E dv$$

11 (30). Чему равны сила и момент сил, действующие на точечный диполь в электрическом поле.

Поместим начало ПДСК в центр диполя, ось $Ox \uparrow \vec{l}$.

Сила, действующая на точечный диполь в электрическом поле.

$$\vec{F} = q \cdot \langle \vec{l}, \nabla \rangle \cdot \vec{E}(\vec{0})$$

Доказательство:

Распишем силы для этой компоненты:

$$\vec{F}_+ = q \vec{E} \left(\frac{\vec{l}}{2} \right)$$

$$\vec{F}_- = -q \vec{E} \left(-\frac{\vec{l}}{2} \right)$$

$$\vec{F} = \vec{F}_+ + \vec{F}_-$$

Разложим $\vec{E}_{\pm}$ в ряд Тейлора:

$$\vec{E}_{\pm} = \vec{E} \left(\pm \frac{\vec{l}}{2} \right) = \vec{E}(\vec{0}) \pm \frac{1}{2} \cdot \langle \vec{l}, \nabla \rangle \cdot \vec{E}(\vec{0}) + o \left(\vec{E} \left(\pm \frac{\vec{l}}{2} \right) \right) = \left(1 \pm \frac{1}{2} \langle \vec{l}, \nabla \rangle \right) \cdot \vec{E}(\vec{0})$$

$$\vec{F} = \vec{F}_+ + \vec{F}_- = q \cdot (\vec{E}_+ - \vec{E}_-) = q \cdot \left[\left(\chi + \frac{1}{2} \langle \vec{l}, \nabla \rangle \right) - \left(\chi - \frac{1}{2} \langle \vec{l}, \nabla \rangle \right) \right] \cdot \vec{E}(\vec{0}) = q \cdot \langle \vec{l}, \nabla \rangle \cdot \vec{E}(\vec{0})$$

Доказано.

Момент сил, действующий на точечный диполь в электрическом поле.

$$\vec{M} = [\vec{p}_l, \vec{E}]$$

Доказательство:

$$\overrightarrow{M} \stackrel{\text{def}}{=} [\vec{r}, \vec{F}]$$

$$\overrightarrow{M}_+ = \left[\frac{\vec{l}}{2}, \vec{F}_+ \right],$$

$$\overrightarrow{M}_- = \left[-\frac{\vec{l}}{2}, \vec{F}_- \right];$$

где $F_{\pm}$ — сила, действующая на этот заряд со стороны поля (**как другого заряда, так и остального поля**).

$$\vec{F}_+ = q \cdot \vec{E}_+$$

$$\vec{F}_- = -q \cdot \vec{E}_-$$

$$(l \rightarrow 0) \Rightarrow (\vec{E}_+ \approx \vec{E}_- = \vec{E})$$

$$\overrightarrow{M} = \overrightarrow{M}_+ + \overrightarrow{M}_- =$$

$$= \left[\frac{\vec{l}}{2}, \vec{F}_+ \right] + \left[-\frac{\vec{l}}{2}, \vec{F}_- \right] = \frac{1}{2} \{ [\vec{l}, q \cdot \vec{E}_+] + [-\vec{l}, -q \cdot \vec{E}_-] \} =$$

$$= \frac{1}{2} \{ [\vec{l}, q \cdot \vec{E}_+] + [\vec{l}, q \cdot \vec{E}_-] \} =$$

$$= q [\vec{l}, \vec{E}] = [q \cdot \vec{l}, \vec{E}] = [\vec{p}_l, \vec{E}]$$

Доказано.

Вопросы теорминимума (часть 3)

1 (31). Дайте определения силы электрического тока и плотности тока. Какова связь между ними? Запишите уравнение непрерывности в интегральной и дифференциальной формах.

Определения.

Электрический ток — направленное движение заряженных частиц.

Сила электрического тока — скалярная физическая величина, равная количеству электрического заряда, проходящего через проводник за единицу времени.

$$I \stackrel{\text{def}}{=} \frac{dq}{dt}$$

В расчетах удобно использовать **векторный элемент проводника с током**:

$$I d\vec{l},$$

где $d\vec{l}$ — элементарный вектор длины проводника, направленный по току.

Плотность тока — векторная физическая величина, характеризующая плотность потока электрического заряда в рассматриваемой точке.

$$\vec{j} = qn\vec{v},$$

где n — концентрация зарядов, $\vec{v}$ — средняя скорость их движения.

Элементарный электрический ток — бесконечно малая часть электрического тока, проходящая через бесконечно малый элемент поверхности за бесконечно малый промежуток времени.

Его удобно использовать при переходе от локальных (дифференциальных) величин к интегральным. Обозначается обычно как dI и равен:

$$dI \stackrel{\text{def}}{=} \langle \vec{j}, d\vec{s} \rangle$$

Связь между силой тока и плотностью тока.

Интегрирование последнего выражения дает искомое:

$$I = \iint_S \langle \vec{j}, d\vec{s} \rangle$$

Уравнение непрерывности в интегральной и дифференциальной формах.

Применим закон сохранения заряда на любом объемном участке проводника.

$$dQ = -dt \oint_{\partial V} \langle \vec{j}, d\vec{s} \rangle,$$

$$\frac{dQ}{dt} + \oint_{\partial V} \langle \vec{j}, d\vec{s} \rangle = 0$$

также называется **законом сохранения заряда в интегральной форме**.

$$dQ = \rho dv,$$

$$Q = \iiint_V dq = \iiint_V \rho dv,$$

$$\oint_{\partial V} \langle \vec{j}, d\vec{s} \rangle = \{\text{th. Остроградского-Гаусса}\} = \iiint_V \operatorname{div} \vec{j} dv.$$

Подставим в законе сохранения заряда в интегральной форме:

$$\frac{\partial \left(\iiint_V \rho dv \right)}{\partial t} + \iiint_V \operatorname{div} \vec{j} dv = 0$$

Заносим под интеграл частную производную (можем сделать по условию Лейбница: $\rho \in C^1$ и интеграл производной сходится).

$$\iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dv + \iiint_V \operatorname{div} \vec{j} dv = 0$$

Объединим интегралы:

$$\iiint_V \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j} \right) dv = 0$$

Интеграл равен нулю, только если подынтегральная функция равна 0:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j} = 0.$$

Полученное условие также называют **законом сохранения заряда в дифференциальной форме**.

2 (32). Условие стационарности тока. Закон Ома для участка цепи и его дифференциальная форма.

Условие стационарности тока.

Постоянный ток — электрический ток, который с течением времени не изменяется по величине и направлению, то есть:

$$\begin{cases} I(t) = \text{const} \\ \text{Ток не меняет свое направление} \end{cases}$$

Обратим внимание, что *постоянный ток* может течь **только** по замкнутому контуру.

$$I(t) = \text{const} \implies \rho(t) = \text{const} \implies \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \implies \operatorname{div} \vec{j} = 0.$$

Закон Ома для участка цепи и его дифференциальная форма.

Эмпирический ли закон?

Закон Ома: Сила тока в участке цепи прямо пропорциональна напряжению и обратно пропорциональна электрическому сопротивлению данного участка цепи.

$$I = \frac{U}{R}$$

В дифференциальной форме показывает линейность связи плотности тока и напряжённости электрического поля в некоторой точке проводника.

$$\vec{j} = \sigma_R (\vec{E} + \vec{E}_{\text{сторонних сил}}),$$

где $\sigma_R = \frac{1}{\rho_R}$ — удельная электропроводность, где ρ_R — удельное сопротивление.

3 (33). Сопротивление и удельное сопротивление проводника. Проводимость и удельная проводимость проводника.

Сопротивление и удельное сопротивление проводника.

Величина	Символ	Определяющая формула	Другие формулы	Единица измерения
Сопротивление	R	$\frac{U}{I}$	$\rho_R \frac{l}{S}$ (для «правильных проводников»)	Ом
Удельное сопротивление	ρ_R	$\frac{ \vec{E} }{ \vec{j} }$	$\frac{1}{\sigma_R}$	Ом · м

Проводимость и удельная проводимость проводника.

Величина	Символ	Определяющая формула	Другие формулы	Единица измерения
Проводимость	G	$\frac{1}{R}$	$\frac{I}{U}$ или $\frac{1}{\rho_R} \cdot \frac{S}{l}$ (для «правильных проводников»)	См (Сименс)
Удельная проводимость (часто просто проводимость)	σ_R	$\frac{1}{\rho_R}$	$\frac{ \vec{j} }{ \vec{E} }$	См / м

4 (34). Как рассчитать сопротивление батареи проводников?

Расчёт емкости батареи проводников (резисторов).

Батарея резисторов — система, состоящая из соединённых между собой одиночных резисторов.

Простейшими из соединений резисторов являются:

1. параллельное,
2. последовательное.

Тогда нахождение сопротивления батареи можно свести к *пошаговому упрощению схемы* — замене группы соединённых резисторов на один эквивалентный, используя известные формулы, пока вся батарея не будет заменена одним эквивалентным резистором.

В более сложных случаях, например, для **моста Уитстона** необходимо решить систему уравнений, полученных после применения правил Кирхгофа (см. другой пункт теормина).

Параллельное соединение резисторов.

$$\frac{1}{R} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{R_i}$$

Доказательство:

Напряжение на всех резисторах одинаково (в силу параллельного соединения):

$$U = U_i \quad \forall i = \overline{1, N}$$

Токи складываются (по первому закону Кирхгофа):

$$I = \sum_{i=1}^N I_i$$

А так как:

$$I = \frac{U_i}{R_i} = \frac{U}{R_i} \quad \forall i = \overline{1, N}$$

То:

$$\sum_{i=1}^N I_i = \sum_{i=1}^N \frac{U}{R_i} = U \cdot \sum_{i=1}^N \frac{1}{R_i}$$

Подставляя выражения для общего тока, получаем:

$$\frac{U}{R} = I = \sum_{i=1}^N I_i = U \cdot \sum_{i=1}^N \frac{1}{R_i}$$

А значит, эквивалентное сопротивление:

$$\frac{1}{R} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{R_i}$$

Доказано.

Последовательное соединение резисторов.

$$R = \sum_{i=1}^N R_i$$

Доказательство:

Ток одинаков для всех (следствие закона сохранения заряда):

$$I = I_i \quad \forall i = \overline{1, N}$$

Общее напряжение:

$$U = \sum_{i=1}^N U_i$$

Где,

$$U_i = I_i \cdot R_i \quad \forall i = \overline{1, N}$$

Следовательно:

$$U = \sum_{i=1}^N (I \cdot R_i) = I \cdot \sum_{i=1}^N R_i$$

Подставляя выражения для зарядов, получаем:

$$\mathcal{I} \cdot R = U = \sum_{i=1}^N U_i = \mathcal{I} \cdot \sum_{i=1}^N R_i$$

А значит, эквивалентная ёмкость:

$$R = \sum_{i=1}^N R_i$$

Доказано.

5 (35). Закон Джоуля-Ленца и его дифференциальная форма.

Плотность мощности теплопроводности — количество тепловой энергии, выделяемой в единице объема в единицу времени.

$$\omega_P \stackrel{\text{def}}{=} \frac{dW}{dV dt}$$

Закон Джоуля-Ленца: мощность тепла, выделяющегося в единице объёма среды при протекании постоянного электрического тока, равна произведению плотности электрического тока на величину напряженности электрического поля:

$$\omega_P = \langle \vec{E}, \vec{j} \rangle = \{ \vec{j} = \sigma_R \vec{E} \} = \sigma_R |\vec{E}|^2 = \frac{|\vec{j}|^2}{\sigma_R}$$

Закон Джоуля-Ленца Количество теплоты, выделяющейся в единицу времени в рассматриваемом участке цепи, пропорционально произведению квадрата силы тока на этом участке и сопротивления участка.

$$W = I^2 R t$$

Доказательство:

$$\omega_P \stackrel{\text{def}}{=} \frac{dW}{dV dt}$$

$$dW = \omega_P dV dt$$

Эх объединить бы интеграл в один интеграл пространства-времени...

$$W = \int_{t_1}^{t_2} \iiint_V \omega_P dV dt$$

$$W = \int_{t_1}^{t_2} \iiint_V \frac{|\vec{j}|^2}{\sigma_R} dV dt$$

1 ток распределён равномерно в однородном проводнике (при очень малых размерах проводника, например, можем так считать). Тогда:

$$\begin{cases} \vec{j}(\vec{r}, t) = \frac{I(t)}{S} \\ \sigma_R(\vec{r}, t) = \text{const} \\ V = S \cdot l \end{cases}$$

$$W = \int_{t_1}^{t_2} \int_0^l \frac{I^2(t)}{S^2 \sigma_R} (\mathcal{S} dx) dt = \int_{t_1}^{t_2} I^2(t) \cdot \frac{l}{\sigma_R S} dt = \int_{t_1}^{t_2} I^2(t) R dt$$

Для постоянного тока ($I(t) = \text{const}$) получаем известную школьную формулу:

$$W = I^2 R t$$

Доказано.

6 (36). Сформулируйте правила Кирхгофа. Убедите экзаменатора в умении их применять.

Первое правило Кирхгофа.

В любом узле электрической цепи алгебраическая сумма токов равна нулю, причем втекающие токи в нашем курсе считаются неотрицательными ($I_{\text{in}} \geq 0$), а вытекающие — неположительными ($I_{\text{out}} \leq 0$):

$$\sum_{i=1}^N I_i = 0.$$

$$\text{и } I_j \geq 0 \quad \forall j = \overline{1, P}$$

$$I_k \leq 0 \quad \forall k = \overline{(P+1), N}$$

Тогда:

$$\sum_{j=1}^P |I_j| = \sum_{k=(P+1)}^N |I_k|.$$

То есть: сколько тока «втекает» в узел — столько же «вытекает».

Выводится из закона сохранения заряда и уравнения Пуассона: в узле $\varphi = \text{const} \implies q = 0$.

Доказательство:

- Докажем, что в $B_\delta(\vec{r})$ (δ -окрестность узла, находящегося в точке $\vec{r}$, $\delta \rightarrow 0+0$) нет заряда через уравнение Пуассона:

$$\begin{cases} \varphi = \text{const} \text{ (узел проводника)} \\ \varepsilon = \text{const} \text{ (в проводнике очевидно верно)} \end{cases}$$

$$\nabla^2 \varphi(\vec{r}) = -\frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon \varepsilon_0}$$

$$\varphi(\vec{r}) = \text{const} \implies \nabla^2 \varphi(\vec{r}) = 0 \implies \frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon \varepsilon_0} = 0 \implies \rho(\vec{r}) = 0$$

- Собственно закон

$$\frac{\partial \left(\iiint_V \rho \, dv \right)}{\partial t} = - \oint_{\partial V} \langle \vec{j}, d\vec{s} \rangle$$

$$\frac{\partial \left(\iiint_V \rho \, dv \right)}{\partial t} = \{ \text{пункт 1 доказательства} \} = \frac{\partial 0}{\partial t} = 0$$

$$\oint_{\partial V} \langle \vec{j}, d\vec{s} \rangle = \{ dI = \langle \vec{j}, d\vec{s} \rangle \} = \sum_{i=1}^N I_i$$

Получаем:

$$\sum_{i=1}^N I_i = 0$$

Доказано.

Второе правило Кирхгофа.

В любом замкнутом контуре алгебраическая сумма напряжений равна нулю, причем напряжения ЭДС считаем неотрицательными ($U_{\text{ЭДС}} = \varepsilon \geq 0$), а падения напряжения на сопротивлениях ($U_{\text{componenet}} \leq 0$) — неположительными.

$$\sum_{i=1}^N U_i = 0.$$

$$\exists U_j = \varepsilon_j \geq 0 \quad \forall j = \overline{1, P}$$

$$I_k R_k = U_k = U_{\text{component}_k} \leq 0 \quad \forall k = \overline{(P+1), N}$$

Тогда:

$$\sum_{j=1}^P |\varepsilon_j| = \sum_{k=(P+1)}^N |I_k R_k|.$$

То есть: сумма всех ЭДС в контуре равна сумме падений напряжений на всех элементах.

Доказательство: прямое следствие потенциальности поля.

Рассказывайте убедительно, чтобы экзаменатор понял В-С-Ё.

7 (37). Закон сохранения энергии для цепей постоянного тока, содержащих ЭДС.

Для любой электрической цепи верен закон сохранения энергии, согласно которому в течение заданного промежутка времени $[t_1, t_2]$:

$$A_{\text{mechanical}} + A_{\varepsilon} = \Delta W + Q,$$

где

- $A_{\text{mechanical}}$ — работа внешних механических сил (например, когда сдвигают обкладки конденсатора, явно воздействуют на цепь внешними силами);
- A_{ε} — работа источников тока (работа ЭДС);
- $\Delta W \stackrel{\text{def}}{=} W(t_2) - W(t_1)$ — изменение энергии электрической цепи;

- Q — количество теплоты, выделившейся в этой цепи за это время. Тепло выделяется только на резисторах.

$$\sqcap W_{C_j} = W_j \text{ --- энергии конденсаторов } \quad \forall j = \overline{1, P}$$

$$W_{L_k} = W_k \text{ --- энергии индуктивностей } \quad \forall k = \overline{(P+1), N}$$

$W(t) := \sum_{i=1}^N W_i(t)$ — суммарная энергия всех конденсаторов и катушек индуктивности.

$\sqcap U$ — напряжение на элементе цепи и I — ток на элементе цепи

$$W_C = \frac{CU^2}{2} = \frac{q^2}{2C} = \frac{qU}{2},$$

где C — емкость конденсатора, q — заряд конденсатора.

$$W_L = \frac{LI^2}{2} = \frac{\Phi^2}{2L} = \frac{\Phi I}{2},$$

где L — индуктивность катушки, Φ — магнитный поток, пронизывающий катушку.

$$W_R = Q = I^2 R t = \frac{U^2}{R} t = U I t,$$

где R — сопротивление резистора.

Как посчитать работу A_ε отдельно взятого источника с ЭДС ε ?

Пусть за промежуток времени $[t_1, t_2]$ через источник протек заряд q :

- Если заряд протекал по направлению действия сторонних сил этого источника, то источник совершил положительную работу:

$$A_\varepsilon = \varepsilon q \text{ (рабочий режим).}$$

- Если заряд протекал в обратном направлении, противоположном действию сторонних сил источника, то источник совершил отрицательную работу:

$$A_\varepsilon = -\varepsilon q \text{ (режим перезарядки).}$$

8 (38). Запишите закон взаимодействия элементов тока — закон Ампера. /* Не противоречит ли закон Ампера третьему закону Ньютона? */

Запишите закон взаимодействия элементов тока — закон Ампера

Закон Ампера: сила, с которой один элемент тока действует на другой, пропорциональна произведению величин токов, длинам этих элементов, синусу угла между ними и обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними.

$$d^2 \vec{F}_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{[I_1 \cdot d\vec{l}_1, [I_2 \cdot d\vec{l}_2, \vec{r}]]}{|\vec{r}|^3},$$

где:

- μ_0 — магнитная постоянная ($\mu_0 \approx 4\pi \cdot 10^{-7} \left[\frac{\text{Н}}{\text{А}^2} \right]$);
- $I_i d\vec{l}_i \quad \forall i = \overline{1, 2}$ — векторный элемент проводника тока;
- $\vec{r}$ — радиус-вектор от источника к точке действия (от первого ко второму).

Примечание: d^2 , так как в уравнении 2 дифференциала.

/* Не противоречит ли закон Ампера третьему закону Ньютона? */

В общем случае закон Ампера противоречит третьему закону Ньютона, так как может быть:

$$d^2 \vec{F}_{12} \nparallel d^2 \vec{F}_{21}.$$

Однако при интегрировании выражения для закона Ампера по двум замкнутым контурам получаем

$$\vec{F}_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{L_1} \oint_{L_2} \frac{[I_1 \cdot d\vec{l}_1, [I_2 \cdot d\vec{l}_2, \vec{r}]]}{|\vec{r}|^3},$$
$$\vec{F}_{21} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{L_2} \oint_{L_1} \frac{[I_2 \cdot d\vec{l}_2, [I_1 \cdot d\vec{l}_1, -\vec{r}]]}{|\vec{r}|^3},$$

Тривиально показывается через свойства векторного произведения, тождество Лагранжа (*бац минус цаб*) и тот факт, что циркуляция градиентного поля по замкнутому контуру равна нулю (это уберет «мешающие» несимметричные слагаемые во время интегрирования).

Для этой силы выполнен третий закон Ньютона.

Замечание: постоянный ток может течь только в замкнутом контуре — поэтому этого доказательства достаточно.

9 (39). Что такое вектор магнитной индукции поля? Запишите закон Био-Савара-Лапласа. Чему равна индукция магнитного поля прямого бесконечного проводя с током?

Определение вектора магнитной индукции поля.

Вектор магнитной индукции $\vec{B}$ — это векторная физическая величина, являющаяся силовой характеристикой магнитного поля, а именно характеристикой его действия на движущиеся заряженные частицы и на обладающие магнитным моментом тела (к примеру постоянные магниты).

Определяется через **силу Лоренца**:

Магнитная индукция $\vec{B}$ — это такой вектор, что сила Лоренца $\vec{F}_L^*$, действующая со стороны электромагнитного поля на пробный заряд q^* , движущийся со скоростью $\vec{v}^*$ в поле с напряженностью $\vec{E}^*$, равна:

$$\vec{F}_L^* = q^* (\vec{E}^* + [\vec{v}^*, \vec{B}])$$

Закон Био-Савара-Лапласа.

$$d\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \frac{[I \cdot d\vec{l}(\vec{r}'), (\vec{r} - \vec{r}')] }{|\vec{r} - \vec{r}'|^3},$$

$$\vec{B} = \int_L d\vec{B};$$

где:

- μ — магнитная проницаемость среды, в вакууме можем считать $\mu = 1$;

- $\vec{r}$ — радиус-вектор точки, в которой вычисляется поле;
- $\vec{r}'$ — радиус-вектор элемента тока.

Чему равна индукция магнитного поля прямого бесконечного провода с током?

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r_{\perp}} \vec{e}_{\varphi},$$

где

- $\vec{e}_{\varphi} = \{-\sin \alpha, \cos \alpha, 0\}$
- $r_{\perp}$ из $\vec{r} = \{r_{\perp} \cos \alpha, r_{\perp} \sin \alpha, z\}$

Доказательство:

$\square$:

$$\vec{r}' = \{0, 0, z'\},$$

$$d\vec{l}' := d\vec{l}(\vec{r}') = \{0, 0, dz'\},$$

$$\vec{r} = \{r_{\perp} \cos \alpha, r_{\perp} \sin \alpha, z\} \text{ (цилиндрическая СК).}$$

$$\vec{r} - \vec{r}' = \{r_{\perp} \cos \alpha, r_{\perp} \sin \alpha, z - z'\}$$

$$|\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{(r_{\perp} \cos \alpha)^2 + (r_{\perp} \sin \alpha)^2 + (z - z')^2} = \sqrt{r_{\perp}^2 + (z - z')^2}$$

$$[d\vec{l}', (\vec{r} - \vec{r}')] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & dz' \\ r_{\perp} \cos \alpha & r_{\perp} \sin \alpha & z - z' \end{vmatrix} = r_{\perp} dz' (-\vec{i} \sin \alpha + \vec{j} \cos \alpha + \vec{k} \cdot 0) =$$

$$= \{\square \vec{e}_{\varphi} = \{-\sin \alpha, \cos \alpha, 0\} \text{ --- это касательный вектор к окружности в } Oxy\} = r_{\perp} dz' \vec{e}_{\varphi}$$

$$d\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot \frac{r_{\perp} dz'}{[r_{\perp}^2 + (z - z')^2]^{\frac{3}{2}}} \vec{e}_{\varphi}$$

$$\vec{B}(\vec{r}) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I r_{\perp} \vec{e}_{\varphi}}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz'}{[r_{\perp}^2 + (z - z')^2]^{\frac{3}{2}}} = (*)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz'}{[r_{\perp}^2 + (z - z')^2]^{\frac{3}{2}}} = \left\{ \begin{array}{l} u := z - z' \\ du = -dz' \\ z' \rightarrow +\infty \Rightarrow u \rightarrow -\infty \\ z' \rightarrow -\infty \Rightarrow u \rightarrow +\infty \end{array} \right\} =$$

$$= \{du \text{ сверху без минуса, так как поменялись пределы и } du = -dz'\} =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{du}{[r_{\perp}^2 + u^2]^{\frac{3}{2}}} = \left[\frac{1}{r_{\perp}^2} \cdot \frac{u}{\sqrt{u^2 + r_{\perp}^2}} \right] \Big|_{-\infty}^{+\infty} =$$

$$= \left\{ \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{u^2}}{\sqrt{u^2 + r_{\perp}^2}} = \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{r_{\perp}^2}{u^2}}} = 1 \right\} = \frac{2}{r_{\perp}^2}$$

$$(*) = \frac{\mu_0 I \cancel{r_{\perp}} \vec{e}_{\varphi}}{4\pi} \cdot \frac{2}{r_{\perp}^2} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r_{\perp}} \vec{e}_{\varphi}$$

Доказано.

10 (40). Сформулируйте теорему о циркуляции магнитной индукции в интегральной и дифференциальной формах.

Циркуляция магнитной индукции в интегральной форме.

$$\oint_L \langle \vec{B}, d\vec{l} \rangle = \mu\mu_0 \sum_{i=1}^N I_i,$$

где I_i — ток пронизывающий поверхность, натянутую на этот контур.

Циркуляция магнитной индукции в дифференциальной форме.

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \mu\mu_0 \vec{j}$$

Доказательство:

$$\oint_{\partial S} \langle \vec{B}, d\vec{B} \rangle = \{\text{формула Стокса}\} = \iint_S \langle \operatorname{rot} \vec{B}, d\vec{s} \rangle$$

$$\sum_{i=1}^N I_i = \iint_S \langle \vec{j}, d\vec{s} \rangle$$

Подставим в теорему о циркуляции в интегральной форме:

$$\iint_S \langle \operatorname{rot} \vec{B}, d\vec{s} \rangle = \mu\mu_0 \iint_S \langle \vec{j}, d\vec{s} \rangle$$

$$\iint_S \langle \operatorname{rot} \vec{B}, d\vec{s} \rangle - \iint_S \langle \mu\mu_0 \vec{j}, d\vec{s} \rangle = 0$$

$$\iint_S (\langle \operatorname{rot} \vec{B}, d\vec{s} \rangle - \langle \mu\mu_0 \vec{j}, d\vec{s} \rangle) = 0$$

$$\iint_S \langle \operatorname{rot} \vec{B} - \mu\mu_0 \vec{j}, d\vec{s} \rangle = 0$$

Интеграл равен нулю только если его подынтегральная функция тождественно равна нулю:

$$\langle \operatorname{rot} \vec{B} - \mu\mu_0 \vec{j}, d\vec{s} \rangle = 0$$

$$\langle \operatorname{rot} \vec{B} - \mu\mu_0 \vec{j}, \vec{n} ds \rangle = 0$$

$\vec{n} ds \neq 0$ и $\operatorname{rot} \vec{B} - \mu\mu_0 \vec{j}$ не всегда $\perp \vec{n} ds \Rightarrow$ чтобы всегда было выполнено достаточно

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \mu\mu_0 \vec{j}$$

Доказано.

11 (41). Сформулируйте теорему Гаусса для магнитного поля в интегральной и дифференциальной формах (формулировка, формулы).

Теорема Гаусса для магнитного поля в интегральной форме.

Поток вектора магнитной индукции через произвольную замкнутую поверхность S равен нулю:

$$\oint \langle \vec{B}, d\vec{s} \rangle = 0$$

Теорема Гаусса для магнитного поля в дифференциальной форме.

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0$$

Доказательство:

$$\oint_{\partial V} \langle \vec{B}, d\vec{s} \rangle = \{\text{формула Остроградского-Гаусса}\} = \iiint_V \operatorname{div} \vec{B} dv = 0$$

Интеграл равен нулю только если его подынтегральная функция тождественно равна нулю:

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0$$

Доказано.

12 (42). Что такое векторный потенциал? Как он связан с магнитной индукцией? Условие калибровки Кулона. /* Получение закона Био-Савара-Лапласа из векторного потенциала. */

Векторный потенциал.

Рассмотрим уравнение:

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0.$$

Из курса математического анализа известно, что:

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{A} = 0 \quad \forall \vec{A}.$$

Тогда подставим:

$$\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A},$$

где $\vec{A}$ — векторный потенциал (магнитного поля).

Условие калибровки.

Понятно, что так $\vec{A}$ определяется неоднозначно, так как

$$\forall \vec{A}' = \vec{A} + \operatorname{grad} f \quad \forall f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$$

будет описывать то же поле $\vec{B}$:

$$\vec{B}' = \operatorname{rot} \vec{A}' = \operatorname{rot} \vec{A} + \operatorname{rot} \operatorname{grad} f = \operatorname{rot} \vec{A} = \vec{B}.$$

Поэтому, пользуясь неоднозначностью в выборе потенциала, можно на него наложить произвольное ограничение. В электродинамике принято:

$$\operatorname{div} \vec{A} = 0,$$

также называемое **условием калибровки (потенциала) Кулона**.

Формула связи с магнитной индукцией.

Выведем формулу для $\vec{A}$:

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \mu\mu_0 \vec{j}$$

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot} \vec{A}) = \mu\mu_0 \vec{j}$$

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot} \vec{A}) = \{\text{см. формулы в конце Нетребко (приложения)}\} = \cancel{\operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{A}} + \nabla^2 A$$

$$\nabla^2 \vec{A}(\vec{r}) = -\mu\mu_0 \vec{j}(\vec{r})$$

По аналогии с электрическим полем получаем способ нахождения $\vec{A}$ через $\vec{B}$:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \iiint_V \frac{\vec{j}(\vec{r}') dv}{|\vec{r} - \vec{r}'|},$$

$$\text{где } \vec{j} = \frac{\operatorname{rot} \vec{B}}{\mu\mu_0}$$

/* Получение закона Био-Савара-Лапласа из векторного потенциала. */

Учитывая снова, что

$$\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A},$$

$$\vec{B}(\vec{r}) = \left[\nabla, \left\{ \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \iiint_V \frac{\vec{j}(\vec{r}') dv}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right\} \right],$$

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \iiint_V \left[\nabla, \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right] dv,$$

Вспомним:

$$\left[\nabla, \left(\frac{\vec{a}}{f} \right) \right] = \frac{[\nabla f, \vec{a}]}{f^2} \quad \forall \vec{a}(\vec{r}) = \overrightarrow{\text{const}} \quad \forall f : \mathbb{R}^3 \rightarrow R$$

$$[\nabla, f\vec{a}] = f \operatorname{rot} \vec{a} - [\vec{a}, \nabla f] = \{\operatorname{rot}(\overrightarrow{\text{const}}) = 0\} = -[\vec{a}, \nabla f] \quad \forall \vec{a}(\vec{r}) = \overrightarrow{\text{const}} \quad \forall f : \mathbb{R}^3 \rightarrow R$$

Если $f = \frac{1}{g}$, то:

$$\left[\nabla, \frac{\vec{a}}{g} \right] = -\frac{[\vec{a}, -\nabla g]}{g^2} = \frac{[\vec{a}, \nabla g]}{g^2} \quad \forall \vec{a}(\vec{r}) = \overrightarrow{\text{const}} \quad \forall f : \mathbb{R}^3 \rightarrow R$$

$$\begin{aligned} \left[\nabla, \left(\frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) \right] &= \frac{[\vec{j}(\vec{r}'), \nabla(|\vec{r} - \vec{r}'|)]}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} = \\ &= \frac{[\vec{j}(\vec{r}'), \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}]}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} = \frac{[\vec{j}(\vec{r}'), (\vec{r} - \vec{r}')] }{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \end{aligned}$$

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \iiint_V \frac{[\vec{j}(\vec{r}'), (\vec{r} - \vec{r}')] }{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dv,$$

Получаем закон Био-Савара-Лапласа!

13 (43). Чему равна индукция магнитного поля плоского витка с током.

А в любой точке?

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{R^2}{(R^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \vec{k} \quad \forall \vec{r} = \{0, 0, z\}.$$

Доказательство:

□ :

$$\vec{r}' = R\{\cos \theta, \sin \theta, 0\},$$

$$d\vec{l}' := d\vec{l}(\vec{r}') = \{\text{переход от одной СК к другой --- через Якобиан}\} =$$

$$= \frac{d\vec{r}'}{d\theta} d\theta = R d\theta \{-\sin \theta, \cos \theta, 0\},$$

$$\vec{r} - \vec{r}' = \{-R \cos \theta, -R \sin \theta, z\}$$

$$|\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{(-R \cos \theta)^2 + (-R \sin \theta)^2 + z^2} = \sqrt{R^2 + z^2}$$

$$[d\vec{l}', (\vec{r} - \vec{r}')] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -R d\theta \sin \theta & R d\theta \cos \theta & 0 \\ -R \cos \theta & -R \sin \theta & z \end{vmatrix} =$$

$$= R d\theta \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ -R \cos \theta & -R \sin \theta & z \end{vmatrix} =$$

$$= R\{\vec{i}[(z \cos \theta) - \cancel{(-R \sin \theta \cdot 0)}] - \vec{j}[(-z \sin \theta) - \cancel{(-R \cos \theta \cdot 0)}] + \vec{k}[(R \sin^2 \theta) + (R \cos^2 \theta)]\} =$$

$$= R d\theta \{z \cos \theta, z \sin \theta, R\}$$

$$d\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot \frac{R d\theta \{z \cos \theta, z \sin \theta, R\}}{(R^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\vec{B}(\vec{r}) = \int_0^{2\pi} d\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I R}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\{z \cos \theta, z \sin \theta, R\}}{(R^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} d\theta = (*)$$

Распишем интеграл по координатно:

$$x : \int_0^{2\pi} \frac{z \cos \theta}{(R^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} d\theta = \frac{z}{(R^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \int_0^{2\pi} \cos \theta d\theta = 0$$

$$y : \int_0^{2\pi} \frac{z \sin \theta}{(R^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} d\theta = \frac{z}{(R^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \int_0^{2\pi} \sin \theta d\theta = 0$$

$$z : \int_0^{2\pi} \frac{R}{(R^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} d\theta = \frac{R}{(R^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{R}{(R^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} 2\pi$$

$$(*) = \frac{\mu_0 I R}{4\pi} \left\{ 0, 0, \frac{2\pi R}{(R^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \right\} = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{R^2}{(R^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \vec{k}$$

Доказано.

14 (44). Чему равны сила и момент сил, действующие на элементарный ток в магнитном поле. /* Связь магнитного момента тока с моментом силы Ампера. */

Сила и момент сил, действующие на элементарный ток в магнитном поле.

Из законов Ампера и Био-Савара-Лапласа получаем

$$d\vec{F} = [I d\vec{l}, \vec{B}].$$

$$d\vec{\tau} \stackrel{\text{def}}{=} [\vec{r}, d\vec{F}] = [\vec{r}, [I d\vec{l}, \vec{B}]].$$

/* Связь магнитного момента тока с моментом силы Ампера. */

ТУТ ПРАВИЛЬНЫЙ РЕЗУЛЬТАТ, НО НЕПРАВИЛЬНЫЙ ПЕРЕХОД.

Рассмотрим замкнутый контур в однородном магнитном поле:

$$\begin{aligned} \vec{\tau} &= \oint d\vec{\tau} = \oint [\vec{r}, [I d\vec{l}, \vec{B}]] = \{ \vec{B}(\vec{r}) = \text{const} \forall \vec{r} \} = \\ &= \oint [[\vec{r}, I d\vec{l}], \vec{B}] = \oint [d\vec{m}, \vec{B}] = [\vec{m}, \vec{B}] \end{aligned}$$

15 (45). Сила Лоренца и характер движения заряда в постоянных электрическом и магнитном полях.

Сила Лоренца — сила действующая на частицу в электро-магнитном поле на заряженную частицу. Она описывается векторным уравнением:

$$\vec{F} = q(\vec{E} + [\vec{v}, \vec{B}]),$$

где

- q — заряд частицы;
- $\vec{E}$ — вектор напряженности электрического поля;
- $\vec{v}$ — скорость частицы;
- $\vec{B}$ — вектор магнитной индукции («аналог напряженности для магнитного поля»).

16 (46). Сформулируйте закон электромагнитной индукции Фарадея и правило Ленца.

Закон Фарадея.

Закон Фарадея. ЭДС индукции в замкнутом контуре пропорциональна производной магнитного потока (пронизывающего этот контур) по времени:

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt}.$$

Отметим, что магнитный поток может изменяться:

1. из-за изменения контура,
2. из-за изменения силы тока в контуре (самоиндукция).

Правило Ленца.

Правило Ленца. Ток, порожденный изменением магнитного потока, направлен так, чтобы создаваемый им магнитный поток был направлен на компенсацию этого изменения.

Вот откуда «минус» в уравнении закона Фарадея!

17 (47). В чем заключается явление самоиндукции. Что характеризует коэффициент самоиндукции (индуктивность). В чем заключается явление взаимной индукции.

Электромагнитная индукция:

- взаимная индукция,
- самоиндукция.

Самоиндукция.

Самоиндукция — это явление возникновения индукционной ЭДС в самом контуре при изменении силы тока в нём.

Когда ток в проводнике изменяется, он создаёт переменное магнитное поле, которое, в свою очередь, изменяет магнитный поток через сам контур $\Rightarrow$ по закону Фарадея возникает ЭДС самоиндукции, которая всегда направлена против изменения тока (по правилу Ленца).

На этом принципе построены катушки индуктивности (в схемах часто называют дросселями), используемые, например, в понижающих преобразователях постоянного напряжения.

Коэффициент самоиндукции (индуктивность).

Индуктивность — коэффициент линейного отношения потока через контур к силе тока возникающему в этом контуре:

$$L \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\Phi}{I}.$$

Взаимная индукция.

Взаимоиндукция (взаимная индукция) — явление возникновения ЭДС индукции в одном контуре, при изменении силы тока во втором контуре, и наоборот:

$$\begin{aligned}\varepsilon_2 &= -\frac{d\varphi_1}{dt} = -L \frac{dI_1}{dt}, \\ \varepsilon_1 &= -\frac{d\varphi_2}{dt} = -L \frac{dI_2}{dt};\end{aligned}$$

где коэффициент L — **взаимная индуктивность контуров**.

На этом принципе построены повышающие / понижающие трансформаторы переменного тока.

18 (48). Запишите формулы для энергии магнитного поля и ее объемной плотности. Энергия системы замкнутых контуров с током (формула).

Объемная плотность.

$$w_B \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\langle \vec{B}, \vec{H} \rangle}{2}$$

Энергия магнитного поля.

$$W_B \stackrel{\text{def}}{=} \iiint_V w_B \, dv$$

(Взаимная) замкнутых контуров с током.

Эти формулы выводятся из:

1. закона Био–Савара–Лапласа;
2. определения векторного магнитного потенциала;
3. определения магнитной потенциальной энергии.

Коэффициент $\frac{1}{2}$ появляется, чтобы не учитывать пары токов дважды (обратите внимание на двойную сумму).

$$W \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N I_i \Phi'_i = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^N \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq l}}^N L_{lk} I_l I_k,$$

где L_{lk} — взаимная индуктивность от контуров с токами I_l и I_k .

$$W = \frac{1}{2} \iiint_V \langle \vec{j}, \vec{A} \rangle \, dv$$

$$W = \frac{1}{2} \iint_S \langle \vec{K}, \vec{A} \rangle \, ds$$

$$W = \frac{1}{2} \int_L \langle I \, d\vec{l}, \vec{A} \rangle$$

19 (49). Молекулярные токи и вектор намагниченности. Дайте определение вектора напряженности магнитного поля.

В веществе $\exists$ микротоки, и если они расположены хаотически, то $\iiint dI = 0 \Rightarrow \vec{B} = \vec{0} \Rightarrow$ магнитных свойств нет.

Если же они структурированы, то вещество — магнетик.

Введём некоторые полезные определения для описания свойств этого вещества.

Магнитный момент тока определяется следующим векторным уравнением:

$$\vec{m} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} \iiint_V [\vec{r}', \vec{j}(\vec{r}')] \, dv$$

и в случае замкнутого контура (бесконечно тонкого провода?):

$$\vec{m} = \frac{I}{2} \oint_L [\vec{r}', dl],$$

а для замкнутого **плоского** контура, ограничивающего площадь S :

$$\vec{m} = \vec{n}IS.$$

Введем **вектор намагниченности (намагничивания)**:

$$\vec{M} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\sum_{i=1}^N \vec{m}_i}{\Delta V}, \quad \vec{m}_i \in \Delta V \quad \forall i = \overline{1, N}.$$

Обратим внимание, что это материальная характеристика вещества.

Соответственно, **напряженность магнитного поля**:

$$\vec{H} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}.$$

20 (50). Сформулируйте теорему о циркуляции вектора напряженности магнитного поля (в интегральной и дифференциальной формах).

Напрямую следуют из:

1. аналогичного утверждения для вектора магнитной индукции $\vec{B}$,
2. материального уравнения для магнитного поля.

$$\oint_L \langle \vec{H}, d\vec{l} \rangle = \sum_{i=1}^N I_i,$$

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{j}$$

Примечание: предпочитайте этот вариант варианту для магнитной индукции, так как тут невозможно «потерять» μ и μ_0 .

21 (51). Запишите материальные уравнения для магнитного поля. Что характеризуют магнитные восприимчивость и проницаемость вещества.

Примечание: в формулировке в списке вопросов *опечатка* — почему-то материальных уравнений у них больше одного, что не так!

Магнитная восприимчивость.

$\vec{M}(\vec{H})$ обычно рассматривают, используя заранее известное разложение в ряд. Мы считаем в первом приближении в:

1. изотропных (Материал называется **изотропным**, если его механические свойства одинаковы во всех направлениях.),
2. однородных
3. (в не очень сильных магнитных полях для большинства материальных сред):

$$\vec{M}(\vec{H}) = \chi \vec{H} + o(\vec{H}),$$

где χ — **магнитная восприимчивость**, коэффициент линейной связи между $\vec{M}$ и $\vec{H}$.

Очевидно, что для вакуума можно считать $\chi = 0$ (так как количество элементарных токов для намагничивания пренебрежимо мало).

(Относительная магнитная) проницаемость и материальное уравнение для магнитного поля.

Рассмотрим, используя знания о векторе напряженности для полей из предыдущего пункта:

$$\vec{H} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M},$$

$$\mu_0 \vec{H} = \vec{B} - \mu_0 \vec{M}.$$

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \mu_0 \vec{M} = \mu_0 \vec{H} + \mu_0 \chi \vec{H} = \mu_0 \vec{H} (1 + \chi) = \mu \mu_0 \vec{H}$$

где $\mu := 1 + \chi$ — **(относительная) магнитная проницаемость**.

$$\vec{B} = \mu \mu_0 \vec{H}$$

называется **материальным уравнением для магнитного поля**.

22 (52). Граничные условия для векторов напряженности и индукции магнитного поля.

Для тангенциальных компонент.

На границе двух сред проекции векторов $\vec{H}$ и $\vec{B}$ на любое касательное к границе направление удовлетворяют соотношениям:

$$|\vec{H}_{\tau_1}| - |\vec{H}_{\tau_2}| = |\vec{j}_{\partial S}|,$$

$$|\vec{B}_{\tau_1}| - |\vec{B}_{\tau_2}| = \mu \mu_0 |\vec{j}_{\partial S}|.$$

Доказательство:

Рассмотрим границу двух сред и прямоугольный контур, пара сторон которого перпендикулярна границе, такой, что граница делит его на две равные части. Вследствие вихревости магнитного поля, циркуляция вектора его напряжённости по любому замкнутому контуру равна алгебраической сумме токов проводимости, пронизывающих поверхность, ограниченную этим контуром (но так как $\Delta h \rightarrow 0 + 0$, то достаточно рассмотреть $\vec{j}_{\partial S}$ — линейную плотность тока границы). Запишем это условие для данного контура, после чего устремим длину перпендикулярной границе стороны прямоугольника к нулю. Получим искомое соотношение.

$$\oint \langle \vec{H}, d\vec{l} \rangle = \int_L \langle \vec{j}_{\partial S}, d\vec{l} \rangle$$

$$|\vec{H}_{\tau_1}| \cdot \Delta l + \cancel{|\vec{H}_{n_1}| \cdot \Delta h} - |\vec{H}_{\tau_2}| \cdot \Delta l - \cancel{|\vec{H}_{n_2}| \cdot \Delta h} = |\vec{j}_{\partial S}| \cdot \Delta l, \text{ если } \Delta h \rightarrow 0 + 0$$

$$\Delta l \cdot (|\vec{H}_{\tau_1}| - |\vec{H}_{\tau_2}|) = |\vec{j}_{\partial S}| \cdot \Delta l \quad | \div \Delta l \neq 0$$

$$|\vec{H}_{\tau_1}| - |\vec{H}_{\tau_2}| = |\vec{j}_{\partial S}|.$$

Из материального уравнения для магнитного поля:

$$|\vec{H}_{\tau_1}| - |\vec{H}_{\tau_2}| = |\vec{j}_{\partial S}| \cdot (\mu\mu_0) \neq 0$$

$$|\vec{B}_{\tau_1}| - |\vec{B}_{\tau_2}| = \mu\mu_0 |\vec{j}_{\partial S}|$$

Доказано.

Для нормальных компонент.

На границе двух сред проекции векторов $\vec{H}$ и $\vec{B}$ на нормаль, проведённую к границе из первой среды во вторую, удовлетворяют соотношениям:

$$|\vec{B}_{n_1}| = |\vec{B}_{n_2}|,$$

$$\mu_1 |\vec{H}_{n_1}| = \mu_2 |\vec{H}_{n_2}|.$$

Доказательство:

Применим теорему Гаусса для магнитной индукции к цилиндру, со следующими свойствами:

1. Малый ($h \rightarrow 0 + 0$, так как иначе это будет уже не граница).
2. Цилиндр $\parallel \vec{n}$.
3. Его нижнее основание находится в первой среде, а верхнее — во второй.

$$\Phi_B = \oint_S \langle \vec{B}, d\vec{s} \rangle = 0$$

Обозначим площадь основания $S_{\text{base}} =: S$

1. Поток через верхнее основание цилиндра: $\Phi_{B_2} = +|\vec{B}_{n_1}| S$.
2. Через боковую поверхность $\oint_{S_{\text{side}}} = 0$, в силу $h \rightarrow 0 + 0$.
3. Через нижнее основание: $\Phi_{B_1} = -|\vec{B}_{n_2}| S$.

Следовательно,

$$|\vec{B}_{n_1}| S - |\vec{B}_{n_2}| S = 0$$

А значит,

$$|\vec{B}_{n_1}| = |\vec{B}_{n_2}|$$

Из материального уравнения для магнитного поля:

$$\mu_1 |\vec{H}_{n_1}| = |\vec{B}_{n_1}| = |\vec{B}_{n_2}| = \mu_2 |\vec{H}_{n_2}|$$

$$\mu_1 |\vec{H}_{n_1}| = \mu_2 |\vec{H}_{n_2}|$$

Доказано.

23 (53). Что такое ток смещения? /* Дайте определение квазистационарных электромагнитных процессов. */

Рассмотрим неполное уравнение Максвелла

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{j} \pm \text{spoiler!}.$$

Это уравнение является дифференциальной формулировкой закона о полном токе (циркуляции магнитного поля) — циркуляция вектора напряжённости магнитного поля равна полному току, пронизывающему любую поверхность, натянутую на контур.

Теперь рассмотрим цепь с конденсатором в процессе его зарядки. Возьмём две цилиндрические поверхности — одну возьмём так, чтобы она была полностью заключена в конденсаторе, а вторую возьмём так, чтобы одно из её оснований пересекало провод, подведённый к конденсатору. То основание, которое лежит в конденсаторе, будем считать нашим контуром (вернее, окружностью, на которой оно построено). Тогда получим, что, с одной стороны, циркуляция должна быть равна нулю, а с другой — току, заряжающему конденсатор.

Это противоречие приводит нас к добавлению слагаемого

$$\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}.$$

Качественно его можно объяснить тем, что, в соответствии с законом непрерывности, усиление поля между обкладками конденсатора будет происходить пропорционально увеличению заряда на его обкладках, что, в свою очередь, происходит именно за счёт тока — то есть, благодаря этому слагаемому противоречие устраняется. Оно и называется **током смещения**.

/* Дайте определение квазистационарных электромагнитных процессов. */

Квазистационарный процесс — процесс время протекания которого столь мало, что его влиянием на систему, в которой он протекает, можно пренебречь.

К таким процессам относятся, например, те, в которых можно пренебречь токами смещения (**квазистационарное приближение**). Физически это эквивалентно пренебрежению запаздыванием поля при его распространении от источника до точки наблюдения.

24 (54). Запишите уравнения Максвелла в дифференциальной форме.

№	Уравнение	Физический смысл
1.	$\operatorname{div} \vec{B} = 0$	Магнитное поле не имеет собственных источников.
2.	$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$	Токи смещения и проводимости порождают вихревое магнитное поле.
3.	$\operatorname{div} \vec{D} = \rho$	Электрический заряд — источник электрической индукции.
4.	$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$	Изменение магнитного поля порождает вихревое электрическое.

25 (55). Запишите уравнения Максвелла в интегральной форме.

№	Уравнение
1.	$\oiint_S \langle \vec{B}, d\vec{s} \rangle = 0$
2.	$\oint_L \langle \vec{H}, d\vec{l} \rangle = I + \iint_S \left\langle \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, d\vec{s} \right\rangle$

№	Уравнение
3.	$\oiint_S \langle \vec{D}, d\vec{s} \rangle = Q_{\text{inside } S}$
4.	$\oint_L \langle \vec{E}, d\vec{l} \rangle = 0 - \iint_S \left\langle \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, d\vec{s} \right\rangle$

26 (56). Сколько решений имеет система уравнений Максвелла. Ответ обоснуйте.

Сами уравнения Максвелла просто «проверяют»: является ли поле в принципе электромагнитным или нет — и, понятное дело, имеет бесконечно много решений (так как и электромагнитных полей бесконечно много).

Для единственности решения надо добавить дополнительные условия, а именно:

1. материальные (в том числе закон Ома),
2. начальные условия (фактически состояние поля в момент t_0).
3. граничные (если среда не одна),

Quick recap — итоговая система систем уравнений:

Система	Откуда система?
$\begin{cases} \operatorname{div} \vec{B} = 0 \\ \operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \\ \operatorname{div} \vec{D} = \rho \\ \operatorname{rot} \vec{E} = \vec{0} - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \end{cases}$	Система уравнений Максвелла
$\begin{cases} \vec{D} = \varepsilon \varepsilon_0 \vec{E} \\ \vec{B} = \mu \mu_0 \vec{H} \\ \vec{j} = \sigma_R \vec{E} \end{cases}$	Материальные уравнения (в том числе третье уравнение — закон Ома) для линейных сред
$\begin{cases} \vec{E}(\vec{r}, t_0) = \vec{E}_0(\vec{r}) \\ \vec{B}(\vec{r}, t_0) = \vec{B}_0(\vec{r}) \end{cases}$	Начальные условия
$\begin{cases} \vec{E}_{\tau_2} = \vec{E}_{\tau_1} \\ \vec{D}_{n_2} - \vec{D}_{n_1} = \sigma \\ \vec{B}_{n_2} = \vec{B}_{n_1} \\ \vec{H}_{\tau_2} - \vec{H}_{\tau_1} = \vec{j} \end{cases}$	Граничные условия (если среда не одна)

27 (57). Дайте определение и запишите выражение для вектора Умова-Пойнтинга. /* Объёмная плотность энергии, плотность потока энергии. */

Пусть в объёме V действует электромагнитное поле и протекают токи. Для простоты предположим, что никаких других преобразований энергии в этом объёме не происходит. Полная мощность теплоты, выделяемая токами, будет равна:

$$P = \iiint_V \langle \vec{j}, \vec{E} \rangle dv = \{ \vec{j} = \text{rot } \vec{H} - \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \} = \iiint_V \langle \text{rot } \vec{H}, \vec{E} \rangle dv - \iiint_V \langle \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \vec{E} \rangle dv = (*)$$

Так как:

$$\text{div} [\vec{E}, \vec{H}] = \langle \vec{H}, \text{rot } \vec{E} \rangle - \langle \vec{E}, \text{rot } \vec{H} \rangle,$$

$$\langle \vec{E}, \text{rot } \vec{H} \rangle = \langle \text{rot } \vec{H}, \vec{E} \rangle = \langle \vec{H}, \text{rot } \vec{E} \rangle - \text{div} [\vec{E}, \vec{H}],$$

то

$$\begin{aligned} (*) &= \iiint_V \langle \vec{H}, \text{rot } \vec{E} \rangle dv - \iiint_V \text{div} [\vec{E}, \vec{H}] dv - \iiint_V \langle \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \vec{E} \rangle dv = \\ &= \{ \text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \} = \\ &= \iiint_V \langle \vec{H}, -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \rangle dv - \iiint_V \text{div} [\vec{E}, \vec{H}] dv - \iiint_V \langle \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \vec{E} \rangle dv = \\ &= - \iiint_V \langle \vec{H}, \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \rangle dv - \iiint_V \text{div} [\vec{E}, \vec{H}] dv - \iiint_V \langle \vec{E}, \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \rangle dv = \\ &= \left\{ \langle \vec{E}, \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \rangle = \frac{1}{2} \frac{\partial \langle \vec{E}, \vec{D} \rangle}{\partial t}, \langle \vec{H}, \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \rangle = \frac{1}{2} \frac{\partial \langle \vec{H}, \vec{B} \rangle}{\partial t} \right\} = \\ &= - \iiint_V \frac{1}{2} \frac{\partial \langle \vec{H}, \vec{B} \rangle}{\partial t} dv - \iiint_V \text{div} [\vec{E}, \vec{H}] dv - \iiint_V \frac{1}{2} \frac{\partial \langle \vec{E}, \vec{D} \rangle}{\partial t} dv = \\ &= \{ \text{можем поменять местами производную и интеграл, так как} \\ &\quad (\langle \vec{E}, \vec{D} \rangle + \langle \vec{H}, \vec{B} \rangle) \in C^1(\mathbb{R}^3) \} = \\ &= -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \iiint_V (\langle \vec{E}, \vec{D} \rangle + \langle \vec{H}, \vec{B} \rangle) dv - \iiint_V \text{div} [\vec{E}, \vec{H}] dv = \\ &= \{ \text{th. Остроградского-Гаусса} \} = \\ &= -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \iiint_V (\langle \vec{E}, \vec{D} \rangle + \langle \vec{H}, \vec{B} \rangle) dv - \oint_{\partial V} [\vec{E}, \vec{H}] ds, \end{aligned}$$

где

- $\vec{\Pi} \stackrel{\text{def}}{=} [\vec{E}, \vec{H}]$ – **вектор Умова-Пойнтинга**, выражающий **плотность потока энергии** через поверхность ∂V , ограничивающую область V ,
- $w \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\langle \vec{E}, \vec{D} \rangle + \langle \vec{H}, \vec{B} \rangle}{2}$ – **объёмная плотность энергии**, находящейся в области V .

28 (58). Получите волновое уравнение из системы уравнений Максвелла. /* Связь между скоростью света, электрической и магнитной постоянными. */

Вывод волнового уравнения из системы уравнений Максвелла.

Рассмотрим **непроводящую** среду. Тогда:

$$\begin{cases} \rho = 0 \\ \vec{j} = \vec{0} \end{cases}$$

Рассмотрим систему уравнений Максвелла, дополненных материальными условиями, но без начальных условий:

$$\begin{cases} \begin{cases} \operatorname{div} \vec{B} = 0 \\ \operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \dot{\vec{D}} \\ \operatorname{div} \vec{D} = \rho = 0 \\ \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\dot{\vec{B}} \end{cases} \\ \begin{cases} \vec{D} = \varepsilon \varepsilon_0 \vec{E} \\ \vec{B} = \mu \mu_0 \vec{H} \\ \vec{j} = \sigma_R \vec{E} \end{cases} \end{cases}$$

Начнем со второго уравнения:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{H} = \dot{\vec{D}} = \varepsilon \varepsilon_0 \dot{\vec{E}} \quad | \quad \frac{\partial}{\partial t} \\ \frac{\partial(\operatorname{rot} \vec{H})}{\partial t} = \varepsilon \varepsilon_0 \ddot{\vec{E}} \\ \frac{\partial(\operatorname{rot} \vec{H})}{\partial t} = \operatorname{rot} \left(\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \right) = \\ = \{ \text{четвертое уравнение : } \operatorname{rot} \vec{E} = -\dot{\vec{B}} = -\mu \mu_0 \dot{\vec{H}} \Rightarrow \dot{\vec{H}} = -\frac{1}{\mu \mu_0} \operatorname{rot} \vec{E} \} = \\ = -\frac{1}{\mu \mu_0} \operatorname{rot}(\operatorname{rot} \vec{E}) = -\frac{1}{\mu \mu_0} [-\nabla^2 \vec{E} + \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{E}] = \{ \operatorname{div} \vec{E} = -\frac{\rho}{\varepsilon \varepsilon_0} = 0 \} = \\ = \frac{1}{\mu \mu_0} \nabla^2 \vec{E} \\ \frac{1}{\mu \mu_0} \nabla^2 \vec{E} = \varepsilon \varepsilon_0 \ddot{\vec{E}} \\ \nabla^2 \vec{E} = \mu \mu_0 \varepsilon \varepsilon_0 \ddot{\vec{E}} \end{aligned}$$

Абсолютно аналогичными преобразованиями получаем:

$$\nabla^2 \vec{H} = \mu \mu_0 \varepsilon \varepsilon_0 \ddot{\vec{H}}$$

/* Связь между скоростью света, электрической и магнитной постоянными. */

Стандартный вид волнового уравнения в трёхмерном пространстве:

$$\nabla^2 \vec{a} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{a}}{\partial t^2},$$

где v — **скорость распространения волны**.

Замечаем, что

$$\frac{1}{v^2} = \mu \mu_0 \varepsilon \varepsilon_0 \Rightarrow v = \frac{1}{\sqrt{\mu \mu_0 \varepsilon \varepsilon_0}}.$$

Найдем скорость света (!), то есть скорость распространения в вакууме, где поле проходит максимально свободно, то есть

$$\mu = 1, \varepsilon = 1 \Rightarrow c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}}.$$

29 (59). Приведите примеры расчета тока в электрических цепях при переходных процессах (RC- и RL-цепи).

RLC-цепь.

Рассмотрим вначале наиболее общий случай цепи с квазистационарными процессами — RLC-цепь, в которую включена переменная ЭДС (подробнее см. пункт **Вынужденные колебания в колебательном контуре под действием гармонической силы. Формулы для амплитуды и фазы.**).

Запишем II правило Кирхгофа:

$$\varepsilon = U_L + U_R + U_C, \quad U_R \equiv Q$$

$$L\dot{I} + RI + \frac{q}{C} = \varepsilon \quad | \quad \frac{\partial}{\partial t}$$

$$L\ddot{I} + R\dot{I} + \frac{I}{C} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial t}$$

- Для RL-цепи считаем конденсатор проводом (формально емкость провода бесконечна).
- Для RC-цепи считаем индуктивность проводом (так как его индуктивность пренебрежимо мала).

RL-цепь.

КАРТИНКУ!

Будем считать эту систему цепью с сосредоточенными параметрами.

Цепь с сосредоточенными параметрами — цепь, ток в которой изменяется во всех участках одновременно и одномоментно.

Запишем II правило Кирхгофа:

$$\varepsilon = U_R + U_L$$

$$\varepsilon = IR + L \frac{dI}{dt}$$

$$L\dot{I}(t) + RI = \varepsilon$$

Решим это дифференциальное уравнение методом вариации постоянной:

I:

$$L\dot{I}(t) + RI = 0$$

$$L \frac{dI}{dt} = -IR$$

$$\frac{dI}{I} = -\frac{R}{L} dt$$

$$\ln|I| = -\frac{R}{L}t + \ln C$$

$$I = Ce^{-\frac{R}{L}t}$$

II:

$$I = C(t)e^{-\frac{R}{L}t}$$

$$\dot{I} = \dot{C}e^{-\frac{R}{L}t} + C\left(-\frac{R}{L}\right)e^{-\frac{R}{L}t}$$

$$L\left[\dot{C}e^{-\frac{R}{L}t} + C\left(-\frac{R}{L}\right)e^{-\frac{R}{L}t}\right] + R\left[Ce^{-\frac{R}{L}t}\right] = \varepsilon$$

$$L\dot{C}e^{-\frac{R}{L}t} = \varepsilon$$

$$\dot{C} = \frac{\varepsilon}{L}e^{\frac{R}{L}t}$$

$$C = \frac{\varepsilon}{L}\left(\frac{L}{R}\right)e^{\frac{R}{L}t} + C_1$$

$$I(t) = \frac{\varepsilon}{R} + e^{-\frac{R}{L}t}C_1$$

Разомкнут $\rightarrow$ замкнут.

Начальное условие:

$$I(0) = I_0$$

$$I(0) = \frac{\varepsilon}{R} + C_1 = I_0 \Rightarrow C_1 = I_0 - \frac{\varepsilon}{R}$$

$$I(t) = \frac{\varepsilon}{R} + \left(I_0 - \frac{\varepsilon}{R}\right)e^{-\frac{R}{L}t}$$

$\lim_{t \rightarrow +\infty} I(t) = \frac{\varepsilon}{R}$ — то есть катушка превращается в обычный проводник.

Рассмотрим 2 случая:

1. $I_0 > \frac{\varepsilon}{R}$ — «разрядка» индуктивности.
2. $I_0 < \frac{\varepsilon}{R}$ — «зарядка» индуктивности.

Замкнут $\rightarrow$ разомкнут.

РС-цепь.

Будем считать эту систему цепью с сосредоточенными параметрами

Запишем II правило Кирхгофа:

$$\varepsilon = U_R + U_C$$

$$\varepsilon = \dot{q}R + \frac{q}{C}$$

$$\dot{q}(t)R + \frac{q(t)}{C} = \varepsilon$$

Решим это дифференциальное уравнение методом ?:

I:

$$\dot{q}(t)R + \frac{q(t)}{C} = 0$$

$$\lambda R + \frac{1}{C} = 0$$

$$\lambda = -\frac{1}{RC}$$

$$q_{\text{однор}} = C_1 e^{-\frac{1}{RC}t}$$

II:

$$f(t) = \varepsilon = P_{n(t)} e^{\gamma t} \Rightarrow \gamma = 0, n = 0 \Rightarrow s = 0$$

$$q_{\text{частн}} = t^s Q_{n(t)} e^{\gamma t} = A$$

$$\dot{A}R + \frac{A}{C} = \varepsilon$$

$$A = \varepsilon C$$

$$q(t) = q_{\text{частн}} + q_{\text{однор}} = \varepsilon C + C_1 e^{-\frac{1}{RC}t}$$

Разомкнут $\rightarrow$ замкнут.

Начальное условие:

$$q(0) = q_0$$

$$q(0) = \varepsilon C + C_1 = q_0 \Rightarrow C_1 = q_0 - \varepsilon C$$

$$q(t) = \varepsilon C + (q_0 - \varepsilon C) e^{-\frac{1}{RC}t}$$

$\lim_{t \rightarrow +\infty} q(t) = \varepsilon C$ — то есть конденсатор разрывает цепь.

Рассмотрим 2 случая:

1. $q_0 > \varepsilon C$ — разрядка до напряжения ЭДС.
2. $q_0 < \varepsilon C$ — зарядка до напряжения ЭДС.

30 (60). Собственные колебания в колебательном контуре. Амплитуда и начальная фаза при гармонических колебаниях.

Колебательный контур — RLC-цепь, в которой происходит обмен энергией между конденсатором и катушкой (откуда и появляются колебания).

Колебания **собственные**, если отсутствуют сторонние ЭДС (колебания происходят за счет уже имеющегося в системе заряда), то есть

$$\varepsilon = 0.$$

Воспользуемся уравнением для RLC-цепи, учитывая, что колебания собственные:

$$\ddot{I} + \frac{R}{L} \dot{I} + \frac{1}{LC} I = 0$$

Решим:

$$\lambda^2 + \frac{R}{L}\lambda + \frac{1}{LC} = 0$$

Принято вводить:

- $\gamma := \frac{R}{2L}$ — коэффициент затухания.
- $\omega_0 := \frac{1}{\sqrt{LC}}$ — собственная (резонансная) частота.

Получаем:

$$\lambda^2 + 2\gamma\lambda + \omega_0^2 = 0$$

$$D = (2\gamma)^2 - 4\omega_0^2 = 4(\gamma^2 - \omega_0^2)$$

Теперь рассмотрим три случая в зависимости от значения γ :

Слабо затухающие колебания ($\gamma < \omega_0$):

В этом случае корни уравнения комплексные:

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$$

$$\lambda_{1,2} = -\gamma \pm i\omega \in \mathbb{C}$$

Решение уравнения:

$$I(t) = C_1 e^{-\gamma t} \cos(\omega t) + C_2 e^{-\gamma t} \sin(\omega t)$$

Докажем, что мы можем перейти к одной тригонометрической функции и получить представление:

$$I(t) = A e^{-\gamma t} \cos(\omega t + \varphi),$$

где:

- A — **амплитуда**. Имеет физический смысл только $A > 0$;
- φ — **начальная фаза**. Имеет физический смысл только $\varphi \in \mathbb{R}$;
- ω — **частота затухающих колебаний**. Имеет физический смысл только $\omega > 0$.

Доказательство:

$$A e^{-\gamma t} \cos(\omega t + \varphi) = A e^{-\gamma t} [\cos \varphi \cos(\omega t) - \sin \varphi \sin(\omega t)] = A e^{-\gamma t} \cos \varphi \cos(\omega t) - A e^{-\gamma t} \sin \varphi \sin(\omega t).$$

Приравняем к решению, полученному «как учила Соловьева»:

$$A e^{-\gamma t} \cos \varphi \cos(\omega t) - A e^{-\gamma t} \sin \varphi \sin(\omega t) = C_1 e^{-\gamma t} \cos(\omega t) + C_2 e^{-\gamma t} \sin(\omega t).$$

Замечаем:

$$C_1 = A \cos \varphi, C_2 = -A \sin \varphi.$$

Докажем их функциональную независимость через Якобиан:

$$\begin{aligned} J &= \begin{vmatrix} \frac{\partial C_1}{\partial A} & \frac{\partial C_1}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial C_2}{\partial A} & \frac{\partial C_2}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -A \sin \varphi \\ -\sin \varphi & -A \cos \varphi \end{vmatrix} = \cos \varphi (-A \cos \varphi) - (-A \sin \varphi)(-\sin \varphi) = \\ &= -A \cos^2 \varphi - A \sin^2 \varphi = -A(\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) = -A \neq 0 \text{ (при } A \neq 0) \end{aligned}$$

Доказано.

Критическое затухание ($\gamma = \omega_0$):

$$\lambda_{1,2} = -\gamma$$

$$I(t) = (A + Bt)e^{-\gamma t}$$

Решение не содержит тригонометрических функций, следовательно, колебаний нет, система монотонно стремится к равновесию.

Сильное затухание ($\gamma > \omega_0$):

$$\lambda_{1,2} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} \in \mathbb{R}$$

$$I(t) = Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t}$$

Колебаний нет.

31 (61). Уравнение затухающих колебаний и его решение, время затухания.

См. предыдущий пункт.

Время затухания — характерное время, за которое амплитуда убывает в e раз:

$$\tau := \frac{1}{\gamma} = \frac{2L}{R} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I(t) = Ae^{-\frac{t}{\tau}} \cos(\omega t + \varphi).$$

32 (62). Вынужденные колебания в колебательном контуре под действием гармонической силы. Формулы для амплитуды и фазы.

Рассматривается RLC-контур, в который подаётся внешняя гармоническая ЭДС:

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0 \cos(\omega t)$$

Тогда уравнение тока:

$$L\ddot{I} + R\dot{I} + \frac{1}{C}I = \dot{\varepsilon}(t) = -\varepsilon_0\omega \sin(\omega t)$$

Решим:

$$\begin{aligned} I_{\text{однор}} &= \{\text{см. предыдущий пункт, будем считать, что см. затухающие колебания}\} = \\ &= ae^{-\gamma t} \cos(\omega t + \varphi), \end{aligned}$$

$$f(t) = e^{\alpha t} [P_n(t) \cos(\beta t) + Q_m(t) \sin(\beta t)] = -\varepsilon_0\omega \sin(\omega t) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} n = 0 \\ m = 0 \end{cases} \Rightarrow k = \max(n, m) = 0, \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = \omega \end{cases} \Rightarrow s = 0$$

$$I_{\text{частн}} = e^{\alpha t} t^s [R_k(t) \cos(\beta t) + T_k(t) \sin(\beta t)] = a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t)$$

$$\dot{I}_{\text{частн}} = -a\omega \sin(\omega t) + b\omega \cos(\omega t)$$

$$\ddot{I}_{\text{частн}} = -a\omega^2 \cos(\omega t) - b\omega^2 \sin(\omega t)$$

Подставим в исходное уравнение:

$$L[-a\omega^2 \cos(\omega t) - b\omega^2 \sin(\omega t)] + R[-a\omega \sin(\omega t) + b\omega \cos(\omega t)] + \frac{1}{C}[a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t)] = -\varepsilon_0 \omega \sin(\omega t)$$

$$\begin{cases} \cos(\omega t) : -aL\omega^2 + bR\omega + \frac{a}{C} = 0 \\ \sin(\omega t) : -bL\omega^2 - aR\omega + \frac{b}{C} = -\varepsilon_0 \omega \end{cases}$$

Выразим из первого уравнения a :

$$a = -\frac{R\omega}{\frac{1}{C} - L\omega^2} b$$

Подставим это выражение во второе уравнение и найдём b :

$$b = -\frac{\varepsilon_0 \omega (\frac{1}{C} - L\omega^2)}{(\frac{1}{C} - L\omega^2)^2 + R^2 \omega^2}.$$

Отсюда:

$$a = \frac{\varepsilon_0 R \omega^2}{(\frac{1}{C} - L\omega^2)^2 + R^2 \omega^2}.$$

Сделаем замену (превращающую 2 тригонометрические функции в одну, как в школе):

$$I_0 = \sqrt{a^2 + b^2} = \frac{\varepsilon_0}{\sqrt{(\frac{1}{\omega C} - \omega L)^2 + R^2}}$$

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{b}{a} = \frac{\frac{1}{\omega C} - L\omega}{R}$$

И само решение:

$$I(t) = I_0 \cos(\omega t - \psi)$$

К тому же (следствие того, что $\dot{q} = I$):

$$I_0 = \omega q_0.$$

33 (63). Резонанс токов и напряжений. Приведите примеры.

Резонанс токов.

Рассмотрим функцию

$$I_0(\omega) = \frac{\varepsilon_0}{\sqrt{(\frac{1}{\omega C} - \omega L)^2 + R^2}}.$$

Найдем ее максимум. В силу монотонного возрастания корня максимум функции будет в минимуме корня, то есть при:

$$\left(\frac{1}{\omega C} - \omega L\right)^2 = 0$$

$$\frac{1}{\omega C} = \omega L$$

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Импедансы катушки и конденсатора будут в таком контуре компенсировать друг друга при полученной частоте колебаний. Эта частота называется **резонансной частотой контура**, поскольку при ней амплитуда тока будет максимальна.

При ней же разность фаз:

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{\frac{1}{\omega C} - L\omega}{R} = 0 \Rightarrow \psi = 0,$$

то есть:

- ток и напряжение находятся в фазе,
- цепь ведёт себя как чисто резистивная,
- цепь сводится к обычному резистору.

34 (64). Опишите и обоснуйте метод комплексных амплитуд (описание, обоснование, пример). Что такое эффективные значения силы тока и напряжения?

Описание метода комплексных амплитуд.

Метод комплексных амплитуд — это способ решения линейных уравнений с гармоническими источниками, основанный на представлении всех величин (напряжений, токов итд.) в виде комплексных экспонент. Он значительно упрощает вычисления, особенно при анализе цепей в установившемся режиме.

Обоснование.

$$\cos(\omega t) = \Re(e^{i\omega t})$$

$$\sin(\omega t) = \Im(e^{i\omega t})$$

Переход к комплексным вычислениям не влияет ни на действительную, ни на мнимую часть решения, при условии корректности переходов (доказывалось в курсе комплексного математического анализа).

Импеданс — комплексное сопротивление между двумя узлами цепи для гармонического сигнала.

Можно получить, что:

- $\hat{Z}_R = R$ — **импеданс сопротивления**,
- $\hat{Z}_C = \frac{1}{i\omega C} = -\frac{i}{\omega C}$ — **импеданс емкости**,
- $\hat{Z}_L = i\omega L$ — **импеданс индуктивности**.

Для них верны все «обычные» законы, такие как закон Ома и законы Кирхгофа.

Пример.

Рассмотрим на примере *RLC-цепи* и источником ЭДС:

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0 \cos(\omega t) = \Re(\hat{\varepsilon}(t))$$

Нужно найти: силу тока $I(t)$ в установившемся режиме, амплитуду и фазовый сдвиг.

Воспользуемся методом комплексных амплитуд:

$$\hat{\varepsilon}(t) = \varepsilon_0 e^{i\omega t}$$

Закон Ома в комплексной форме:

$$\hat{I} = \frac{\hat{\varepsilon}}{\hat{Z}},$$

где $\hat{Z}$ — суммарный импеданс цепи.

Комплексные сопротивления соединены последовательно:

$$\hat{Z} = \hat{Z}_R + \hat{Z}_C + \hat{Z}_L = R + \left(-\frac{i}{\omega C}\right) + i\omega L = R + i\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$$

Представим в полярной форме $\hat{I}_0 = |\hat{I}_0| e^{i\psi} = I_0 e^{i\psi}$ (как раз модуль в полярном представлении — амплитуда числа):

$$I_0 = |\hat{I}_0| = \left| \frac{\varepsilon_0}{\hat{Z}} \right| = \frac{|\varepsilon_0|}{|\hat{Z}|} = \frac{\varepsilon_0}{|\hat{Z}|} = \frac{\varepsilon_0}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}$$

Фазовый сдвиг ψ :

Представим импеданс в полярной форме:

$$\hat{Z} = |\hat{Z}| e^{i\psi}$$

Так как у ε_0 нет фазы (число действительное), то фазу задает только $\hat{Z}$:

$$\psi = \arg(Z) = \arctan\left(\frac{\Im(Z)}{\Re(Z)}\right) = \{ \exists X = \Im(Z) \} = \arctan\left(\frac{X}{R}\right) = \arctan\left(\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}\right)$$

Что такое эффективные значения силы тока и напряжения?

Перенесено в пункт «Запишите формулу для мощности переменного тока.», потому что тут он «ни к селу, ни к городу» [единственное изменение порядка вопросов от автора].

35 (65). Запишите формулу для мощности переменного тока.

Формула мощности без эффективных тока и напряжения.

$$\exists \varphi := -\psi$$

$$\begin{aligned} dW = UI dt &= (U_0 \cos(\omega t))(I_0 \cos(\omega t + \varphi)) dt = \{ \cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)] \} = \\ &= \frac{1}{2} U_0 I_0 [\cos \varphi + \cos(2\omega t + \varphi)] dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_t^{t+T} dW &= \int_t^{t+T} \frac{1}{2} U_0 I_0 [\cos \varphi + \cos(2\omega t + \varphi)] dt = \\ &= \frac{1}{2} U_0 I_0 \left[\int_t^{t+T} \cos \varphi dt + \int_t^{t+T} \cos(2\omega t + \varphi) dt \right] = \frac{1}{2} U_0 I_0 \cos \varphi \int_t^{t+T} dt = \frac{1}{2} U_0 I_0 \cos \varphi T \end{aligned}$$

$$P \stackrel{\text{def}}{=} \frac{W}{\Delta t} = \frac{1}{2} U_0 I_0 \cos \varphi$$

Идея эффективного значения.

В общем случае.

$$\langle y(t) \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{T} \int_0^T y(t) dt$$

Для любой периодической функции $y(t)$, её эффективное значение определяется как:

$$\text{RMS} \equiv y_{\text{эфф}} \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T y^2(t) dt},$$

где RMS — Root Mean Square.

Применимо к формуле мощности.

Рассмотрим мощность нашей цепи с другой стороны:

$$P(t) = I^2(t)R = I_0^2 \cos^2(\omega t + \varphi)R$$

Мы хотим найти такое постоянное значение тока $I_{\text{эфф}}$, которое выделяло бы в среднем (используем среднее квадратичное, так как мощность зависит от квадрата тока) столько же тепла за то же время:

$$RI_{\text{эфф}}^2 = R \langle I_0^2 \cos^2(\omega t + \varphi) \rangle,$$

$$\langle I_0^2 \cos^2(\omega t + \varphi) \rangle = I_0^2 \langle \cos^2(\omega t + \varphi) \rangle = \frac{I_0^2}{2},$$

так как:

$$\begin{aligned} \langle \cos^2(\omega t + \varphi) \rangle &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{T} \int_0^T \cos^2(\omega t + \varphi) dt = \left\{ \cos^2 x = \frac{1}{2} [1 + \cos(2x)] \right\} = \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T \frac{1 + \cos(2\omega t + 2\varphi)}{2} dt = \frac{1}{2T} \left[\int_0^T 1 dt + \int_0^T \cos(2\omega t + 2\varphi) dt \right] = \frac{1}{2T} (T + 0) = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Итого:

$$RI_{\text{эфф}}^2 = R \langle I_0^2 \cos^2(\omega t + \varphi) \rangle = R \frac{I_0^2}{2}$$

$$I_{\text{эфф}} = \frac{I_0}{\sqrt{2}}$$

Формула мощности в терминах эффективных тока и напряжения.

$$P = \frac{1}{2} U_0 I_0 \cos \varphi = \frac{1}{2} (I_{\text{эфф}} \sqrt{2}) (U_{\text{эфф}} \sqrt{2}) \cos \varphi = I_{\text{эфф}} U_{\text{эфф}} \cos \varphi$$

$\cos \varphi$ — **коэффициент мощности** — показывает, куда тратится энергия в цепи:

- 0 — только реактивная нагрузка (всё тратится на перекачку энергии из конденсатора в индуктивность),
- 1 — только активная нагрузка (всё тратится на нагрев резистора).

36 (66). В чем заключается скин-эффект? Чему равна толщина скин-слоя в простейших случаях?

Скин-эффект — явление концентрации переменного тока вблизи поверхности проводника или, иначе, затухание электромагнитной волны с глубиной ее проникновения в проводник.

Предположим, что:

- среда *линейная и изотропная*,
- *токи смещения малы* и ими можно пренебречь (что допустимо в хорошем проводнике на не слишком высоких частотах).

Начинаем с уравнений Максвелла.

$$\begin{aligned}\operatorname{rot} \vec{H} &= \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \sigma_R \vec{E} \quad | \quad \mu\mu_0 \\ \operatorname{rot} \vec{B} &= \mu\mu_0 \sigma_R \vec{E} \quad | \quad \frac{\partial}{\partial t} \\ \frac{\partial(\operatorname{rot} \vec{B})}{\partial t} &= \mu\mu_0 \sigma_R \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \\ \frac{\partial(\operatorname{rot} \vec{B})}{\partial t} &= \operatorname{rot} \left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) = \{ \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \} = \\ &= -\operatorname{rot}(\operatorname{rot} \vec{E}) = \nabla^2 \vec{E} - \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{E} = \{ \operatorname{div} \vec{E} = -\frac{\rho}{\varepsilon\varepsilon_0} = 0 \text{ в проводнике} \} = \\ &= \nabla^2 \vec{E}\end{aligned}$$

Будем считать, что $\vec{E}$ зависит только от x ($\vec{E}(\vec{r}, t) = E(x, t)$).

Тогда:

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = \mu\mu_0 \sigma_R \frac{\partial E}{\partial t}$$

Будем считать

$$E(x, t) = f(x) \cos(\omega t).$$

Воспользуемся методом комплексных амплитуд:

$$E(x, t) = \Re[e(x)e^{i\omega t}].$$

Решим для e комплексного:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 (e(x)e^{i\omega t})}{\partial x^2} &= \mu\mu_0 \sigma_R \frac{\partial (e(x)e^{i\omega t})}{\partial t} \\ e^{i\omega t} \frac{\partial^2 e}{\partial x^2} &= \mu\mu_0 \sigma_R (e i\omega e^{i\omega t})\end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 e}{\partial x^2} = \mu\mu_0\sigma_R i\omega e$$

$$\text{т} k^2 = \mu\mu_0\sigma_R i\omega$$

$$\lambda^2 = k^2$$

$$\lambda_{1,2} = \pm k$$

$$e(x) = Ae^{-kx} + Be^{kx} = \{B = 0 \text{ поле не возрастает, } A = E_0\} = E_0 e^{-kx}$$

$$k = \sqrt{i\omega\mu\mu_0\sigma_R} = \sqrt{\omega\mu\mu_0\sigma_R}\sqrt{i} = \{i = e^{i\frac{\pi}{2}} \Rightarrow \sqrt{i} = e^{i\frac{\pi}{4}} = \frac{1+i}{\sqrt{2}}\} = \sqrt{\omega\mu\mu_0\sigma_R} \frac{1+i}{\sqrt{2}} =$$

$$= \{\text{т} \delta := \sqrt{\frac{2}{\mu\mu_0\sigma_R\omega}}\} = \frac{1+i}{\delta}$$

$$E(x, t) = \Re(e) = E_0 e^{-\frac{x}{\delta}} \cos\left(\omega t - \frac{x}{\delta}\right),$$

где δ — **толщина скин слоя** — на этом расстоянии от поверхности ток убывает в e раз.

37 (67). Что такое плоская волна? Нарисуйте взаимную ориентацию полевых векторов и волнового вектора в плоской волне. /*
Чему равна объёмная плотность энергии электромагнитной волны? */
Чему равна плотность потока энергии электромагнитной волны? /*
Чему равна плотность потока импульса? */

Плоская волна.

Плоская волна — это волна, у которой фронт (поверхность постоянной фазы) является плоскостью, а векторы электрического и магнитного полей:

- взаимно перпендикулярны,
- поперечны направлению распространения,
- гармонически изменяются с одинаковой фазой.

Рассмотрим **непроводящую** среду. Тогда:

$$\begin{cases} \rho = 0 \\ \vec{j} = \vec{0} \end{cases}$$

Перепишем «роторные» уравнения Максвелла в удобной форме:

$$\text{rot } \vec{H} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ H_x & H_y & H_z \end{vmatrix} = \varepsilon\varepsilon_0 \dot{\vec{E}}$$

$$\text{rot } \vec{E} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} = -\mu\mu_0 \dot{\vec{H}}$$

Предположим, что волна распространяется вдоль оси Ox (по вектору $\vec{d} \parallel \vec{i}$, точное определение $\vec{d}$ далее):

- Все поля зависят только от x и t ,
- $\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial z} = 0$,
- плоскости постоянной фазы — плоскости $x = \text{const}$.

Подставляя упрощённые условия в роторы, получаем систему:

$$\begin{cases} \frac{\partial E_x}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} = -\mu\mu_0 \frac{\partial H_z}{\partial t} \\ \frac{\partial E_z}{\partial x} = \mu\mu_0 \frac{\partial H_y}{\partial t} \\ \frac{\partial H_x}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial H_y}{\partial x} = \varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial E_z}{\partial t} \\ \frac{\partial H_z}{\partial x} = -\varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial E_y}{\partial t} \end{cases}$$

Выводы из системы:

1. $E_x = \text{const}, H_x = \text{const}$.
2. Остается две независимые пары уравнений.

I. Вертикальная поляризация:

$$\begin{cases} \frac{\partial E_y}{\partial x} = -\mu\mu_0 \frac{\partial H_z}{\partial t} \\ \frac{\partial H_z}{\partial x} = -\varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial E_y}{\partial t} \end{cases}$$

Это описывает плоскую волну с:

- $\vec{E} \parallel \vec{j}$,
- $\vec{H} \parallel \vec{k}$.

II. Горизонтальная поляризация:

$$\begin{cases} \frac{\partial E_z}{\partial x} = \mu\mu_0 \frac{\partial H_y}{\partial t} \\ \frac{\partial H_y}{\partial x} = \varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial E_z}{\partial t} \end{cases}$$

Это описывает плоскую волну с:

- $\vec{E} \parallel \vec{k}$,
- $\vec{H} \parallel \vec{j}$.

Заметим, что:

$$[\vec{E}, \vec{H}] = \vec{d} \parallel \vec{i}$$

Рисунок взаимной ориентации полевых векторов и волнового вектора в плоской волне.

Under construction.

/* Чему равна объёмная плотность энергии электромагнитной волны? */

Как мы уже знаем, объёмная плотность энергии электромагнитного поля:

$$w \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\langle \vec{E}, \vec{D} \rangle + \langle \vec{H}, \vec{B} \rangle}{2}$$

Докажем, что в электромагнитной волне:

$$\vec{B} = \frac{\vec{E}}{c}$$

Доказательство:

I.

Пусть волна распространяется в вакууме вдоль оси Ox , с электрическим полем вдоль Oy , и магнитным — вдоль Oz :

$$\vec{E}(x, t) = E_0 \cos(kx + \omega t) \vec{j} = E_y \vec{j},$$

$$\vec{B}(x, t) = B_0 \cos(kx + \omega t) \vec{k} = B_z \vec{k}.$$

Применим уравнение Максвелла:

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}.$$

Подставим:

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} \vec{k} = -\frac{\partial B_z}{\partial t} \vec{k}$$

$$k E_0 \sin(kx + \omega t) = \omega B_0 \sin(kx + \omega t)$$

$$B_0 = \frac{k}{\omega} E_0$$

II.

Докажем, что в вакууме:

$$\omega = ck$$

Доказательство:

$$\nabla^2 \vec{E} = \mu_0 \varepsilon_0 \ddot{\vec{E}}.$$

$$\mu = 1, \varepsilon = 1 \implies \nabla^2 \vec{E} = \mu_0 \varepsilon_0 \ddot{\vec{E}}.$$

Подставим:

$$\frac{\partial}{\partial x^2} [E_0 \cos(kx + \omega t) \vec{j}] = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t^2} [E_0 \cos(kx + \omega t) \vec{j}],$$

$$E_0 \vec{j} \frac{\partial}{\partial x^2} \cos(kx + \omega t) = \mu_0 \varepsilon_0 E_0 \vec{j} \frac{\partial}{\partial t^2} \cos(kx + \omega t),$$

$$k^2 \cos(kx + \omega t) = \mu_0 \varepsilon_0 \omega^2 \cos(kx + \omega t),$$

$$\omega = \frac{k}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} = ck.$$

Доказано.

III.

$$\begin{cases} B_0 = \frac{k}{\omega} E_0 \\ \omega = ck \end{cases}$$

Откуда:

$$B_0 = \frac{E_0}{c}$$

и:

$$\vec{B} = \frac{\vec{E}}{c}$$

Доказано.

Зная это и тот факт, что вакуум — линейная среда:

$$w = \varepsilon \varepsilon_0 |\vec{E}|^2 = \frac{|\vec{B}|^2}{\mu \mu_0}$$

Плотность потока энергии электромагнитной волны.

Как мы уже знаем, **вектор Умова-Пойнтинга**

$$\vec{\Pi} \stackrel{\text{def}}{=} [\vec{E}, \vec{H}]$$

показывает:

- направление переноса энергии (совпадает с направлением распространения волны),
- количество энергии, проходящей через единичную площадь в единицу времени, то есть плотность потока энергии электромагнитной волны.

Для электромагнитной волны в линейной среде:

$$|\vec{\Pi}| = wc$$

/* Чему равна плотность потока импульса? */

Этого вопроса в списке нет, так что ладно

Вопросы теорминимума (часть 4)

38 (68). Обоснуйте возможность введения скалярного и векторного потенциалов нестационарного электромагнитного поля.

Векторный потенциал.

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0$$

Это выполнено, когда:

$$\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}(\vec{r}, t)$$

(этот факт доказывался в курсе математического анализа 3-го семестра).

Скалярный потенциал.

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial B}{\partial t} = -\frac{\partial \operatorname{rot} \vec{A}}{\partial t}$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\operatorname{rot} \left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right)$$

$$\operatorname{rot} \left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = \vec{0}$$

$$\exists \vec{F} := \vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

Это выполнено, когда:

$$\vec{F} = -\operatorname{grad} \varphi(\vec{r}, t)$$

(этот факт доказывался в курсе математического анализа 3-го семестра).

Следовательно:

$$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \operatorname{grad} \varphi$$

39 (69). Запишите условие калибровки Лоренца.

Калибровка векторного потенциала — наложение дополнительных инвариантных условий, позволяющих однозначно вычислить векторный потенциал электромагнитного поля для решения тех или иных задач.

Требование инвариантности — физическое содержание калибровочных условий зависело только от напряжённости и индукции электромагнитного поля и оставалось неизменным при всех преобразованиях потенциалов поля.

Калибровка Лоренца:

$$\operatorname{div} \vec{A} + \frac{1}{v} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$$

$$\operatorname{div} \vec{A} = -\frac{1}{v} \frac{\partial \varphi}{\partial t}$$

40 (70). Запишите уравнения для векторного и скалярного потенциалов электромагнитного поля.

Уравнение векторного потенциала.

$$\begin{aligned}\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{A} &= \operatorname{rot} \vec{E} = \mu\mu_0 \left(\vec{j} + \varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = \mu\mu_0 \vec{j} + \mu\mu_0 \varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \\ &= \mu\mu_0 \vec{j} + \mu\mu_0 \varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial \left(-\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \operatorname{grad} \varphi \right)}{\partial t} = \\ &= \mu\mu_0 \vec{j} - \mu\mu_0 \varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \mu\mu_0 \varepsilon\varepsilon_0 \operatorname{grad} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)\end{aligned}$$

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{A} = -\nabla^2 \vec{A} + \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{A} = \{\text{условие калибровки}\} = -\nabla^2 \vec{A} - \mu\mu_0 \varepsilon\varepsilon_0 \operatorname{grad} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)$$

Приравняем:

$$\begin{aligned}\mu\mu_0 \vec{j} - \mu\mu_0 \varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \cancel{\mu\mu_0 \varepsilon\varepsilon_0 \operatorname{grad} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)} &= -\nabla^2 \vec{A} - \cancel{\mu\mu_0 \varepsilon\varepsilon_0 \operatorname{grad} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)} \\ \nabla^2 \vec{A} - \mu\mu_0 \varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} &= -\mu\mu_0 \vec{j}\end{aligned}$$

Уравнение скалярного потенциала.

$$\begin{aligned}\frac{\rho(\vec{r}, t)}{\varepsilon\varepsilon_0} &= \operatorname{div} \vec{E} = \operatorname{div} \left(-\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \operatorname{grad} \varphi \right) = \\ &= -\nabla^2 \varphi - \operatorname{div} \left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = -\nabla^2 \varphi - \frac{\partial}{\partial t} (\operatorname{div} \vec{A}) = \\ &= \{\text{условие калибровки}\} = -\nabla^2 \varphi - \frac{\partial}{\partial t} \left(-\frac{1}{v} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) = \\ &= -\nabla^2 \varphi + \mu\mu_0 \varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \\ \nabla^2 \varphi - \mu\mu_0 \varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} &= -\frac{\rho(\vec{r}, t)}{\varepsilon\varepsilon_0}\end{aligned}$$

41 (71). Какой вид имеют решения уравнения для векторного и скалярного потенциалов электромагнитного поля?

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \iiint_V \frac{\vec{j}(\vec{r}', t_r) dv}{|\vec{r} - \vec{r}'|},$$

$$\varphi(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0} \iiint_V \frac{\rho(\vec{r}', t_r)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dv,$$

$$t_r = t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{v} \quad \text{--- ретардированное время}$$

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0}}$$

42 (72). Векторный и скалярный потенциалы электромагнитного поля электронейтральной системы движущихся зарядов на больших расстояниях от нее.

$$\varphi(\vec{r}, t) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0} \cdot \operatorname{div} \left[\frac{\vec{p}\left(t - \frac{|\vec{r}|}{v}\right)}{|\vec{r}|} \right],$$

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu\mu_0}{4\pi|\vec{r}|} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\vec{p}\left(t - \frac{|\vec{r}|}{v}\right)}{|\vec{r}|} \right],$$

где $\vec{p}$ — дипольный момент.

43 (73). Запишите выражения для напряженностей электрического и магнитного полей, создаваемых электронейтральной системой движущихся зарядов на больших расстояниях от нее.

ГРОБ!

Если вкратце: берите производные от предыдущего пункта до полусмерти, обозначив

$$\vec{p}_0 f(\vec{r}, t) = \vec{p} \frac{t - \frac{r}{v}}{r}$$

Нужные уравнения:

$$\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}$$

$$\vec{E} = -\operatorname{grad} \varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

44 (74). Запишите выражения для напряженностей электрического и магнитного полей, создаваемых электронейтральной системой движущихся зарядов, дипольный момент которой меняется по гармоническому закону, на больших (по сравнению с длиной волны) расстояниях от нее.

ГРОБ!

45 (75). Чему равна средняя мощность, излучаемая электронейтральной системой движущихся зарядов, дипольный момент которой меняется по гармоническому закону, на больших (по сравнению с длиной волны) расстояниях от нее?

$$\langle P \rangle = \frac{\mu_0 \omega^4}{12\pi c} |p_0|^2$$

Приложение.

Теормин по формулам.

Огромная проблема списка формул в Нетребко — он сверх всякой меры большой. Выпишем здесь те, которые встречаются в этом файле:

Тождество Лагранжа («бац минус цаб»):

$$[\vec{a}, [\vec{b}, \vec{c}]] = \langle \vec{b}, \langle \vec{a}, \vec{c} \rangle \rangle - \langle \vec{c}, \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle \rangle$$

$$\nabla \stackrel{\text{def}}{=} \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z}$$

Но важно понимать, что набла не вектор, поэтому осторожно!

$$\langle \nabla, \varphi \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \text{grad } \varphi$$

$$\langle \nabla, \vec{a} \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \text{div } \vec{a}$$

$$[\nabla, \vec{a}] \stackrel{\text{def}}{=} \text{rot } \vec{a}$$

$$\text{div rot } \vec{a} = 0$$

$$\text{rot grad } \varphi = \vec{0}$$

$$\text{div grad } \varphi \stackrel{\text{def}}{=} \nabla^2 \varphi$$

$$\text{rot}(\varphi \vec{a}) = \varphi \text{rot } \vec{a} - [\vec{a}, \nabla \varphi]$$

Но проще запомнить так:

$$[\nabla, \varphi \vec{a}] = \varphi [\nabla, \vec{a}] - [\vec{a}, \nabla \varphi]$$

$$\text{div} [\vec{a}, \vec{b}] = \langle \vec{b}, \text{rot } \vec{a} \rangle - \langle \vec{a}, \text{rot } \vec{b} \rangle$$

$$\text{rot rot } \vec{a} = -\nabla^2 \vec{a} + \text{grad div } \vec{a}$$

$$\text{rot } \vec{r} = \vec{0}, \text{ где } \vec{r} \text{ --- радиус-вектор}$$

$$[\text{grad } f(|\vec{r}|), \vec{r}] = \vec{0}$$

$$\int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{a^2} \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}}$$

Из последней таблички (с разными системами координат) ОБЯЗАТЕЛЬНО надо знать Лапласианы (хотя бы только первые члены в силу симметрии задач):

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dots$$

$$\nabla^2 f = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial f}{\partial \rho} \right) + \dots$$

$$\nabla^2 f = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \dots$$

Немного об основных понятиях векторного анализа.

Дивергенция показывает, есть ли у поля источники и стоки

А ротор?

Предметный указатель.

- 1 Точечный электрический заряд
- 2 Материальная точка
- 3 Электрический заряд
- 4 Пробный заряд
- 5 напряженностью электрического поля
- 6 Поток вектора напряжённости
- 7 Потенциал
- 8 Электрический диполь
- 9 точечным
- 10 элементарным
- 11 Дипольный момент
- 12 Конденсатор
- 13 обкладками конденсатора
- 14 Емкость
- 15 Плоский конденсатор
- 16 Батарея конденсаторов
- 17 Электрическая поляризация диэлектриков
- 18 Вектор поляризации среды
- 19 Электрическая индукция
- 20 Поляризуемость
- 21 диэлектрическая восприимчивость
- 22 (относительная) диэлектрическая проницаемость
- 23 материальным уравнением для электростатического поля
- 24 Собственная энергия заряда
- 25 Электрический ток
- 26 Сила электрического тока
- 27 векторный элемент проводника с током
- 28 Плотность тока
- 29 Элементарный электрический ток
- 30 законом сохранения заряда в интегральной форме
- 31 Постоянный ток
- 32 Батарея резисторов
- 33 Плотность мощности теплопроводности
- 34 Вектор магнитной индукции
- 35 векторный потенциал (магнитного поля)

- 36 условием калибровки (потенциала) Кулона
- 37 Сила Лоренца
- 38 Самоиндукция
- 39 Индуктивность
- 40 Взаимоиндукция (взаимная индукция)
- 41 взаимная индуктивность контуров
- 42 магнетик
- 43 Магнитный момент тока
- 44 вектор намагниченности (намагничивания)
- 45 напряженность магнитного поля
- 46 изотропным,
- 47 магнитная восприимчивость
- 48 (относительная) магнитная проницаемость
- 49 материальным уравнением для магнитного поля
- 50 током смещения
- 51 Квазистационарный процесс
- 52 вектор Умова-Пойнтинга
- 53 плотность потока энергии
- 54 объёмная плотность энергии
- 55 скорость распространения волны
- 56 Цепь с сосредоточенными параметрами
- 57 Колебательный контур
- 58 собственные
- 59 Время затухания
- 60 резонансной частотой контура
- 61 Метод комплексных амплитуд
- 62 Импеданс
- 63 коэффициент мощности
- 64 Скин-эффект
- 65 толщина скин слоя
- 66 Плоская волна
- 67 Калибровка векторного потенциала